ΛΕΥΚΟΙ ΝΑΝΟΙ

1. Γενικά

Οι Λευκοί Νάνοι (White Dwarfs) είναι το αποτέλεσμα της αναχαιτίσεως της βαρυτικής κατάρρευσης ενός κοινού αστέρα, με μικρή σχετικά μάζα, από την πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων, όταν πλέον δε συμβαίνουν στον πυρήνα του αστέρα θερμοπυρηνικές αντιδράσεις συντήξεως. (τα καύσιμα του αστέρα έχουν εξαντληθεί)

Μία σύνοψη όσων συμβαίνουν στους Λευκούς Νάνους περιγράφεται στα παρακάτω:

α. Η βαρυτική κατάρρευση του αστέρα ξεκινά όταν σταματήσει η παραγωγή ενέργειας στο εσωτερικό του αστέρα, δηλαδή όταν εξαντληθεί όλη η προς «καύση» (σύντηξη) ύλη του πυρήνα.

β. Η θερμοκρασία στο κέντρο των Λευκών Νάνων κυμαίνεται από **$T = 10^6$ K έως $T = 10^7$ K** και σε καμία περίπτωση δεν ξεπερνά κατά πολύ τους 10^7 K, αφού η μάζα τους δεν είναι αρκετή ώστε η βαρυτική τους κατάρρευση να φθάσει στο σημείο όπου η πίεση της βαρύτητας να ανεβάσει τη θερμοκρασία πάνω από τους 10^8 K όπου ξεκινούν οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις συντήξεως των στοιχείων που έχουν μείνει στον πυρήνα.

γ. Η πυκνότητα των Λευκών Νάνων είναι μεγάλη, πολύ μεγαλύτερη αυτής των αστέρων από τους οποίους προήλθαν. Τα συστατικά τους στοιχεία έχουν υποστεί την μεγάλη βαρυτική πίεση, η οποία έχει εκτοπίσει τα ηλεκτρόνια ακόμη και του εσωτερικού φλοιού. Οι πυρήνες των συστατικών στοιχείων έχουν πλησιάσει τόσο, ώστε δεν έχουν αφήσει χώρο για ηλεκτρόνια τα οποία έχουν εκφυλιστεί αφήνοντας τις τροχιές τους. Η θέση των ηλεκτρονίων είναι πια *«τυχαία»* και περιγράφεται από την *«αρχή της αβεβαιότητος»*[1].

δ. Η υδροστατική ισορροπία των Λευκών Νάνων επιτυγχάνεται με την αντιστάθμιση της βαρυτικής πιέσεως από την πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων.

ε. Ο όγκος που καταλαμβάνει ένας Λευκός Νάνος είναι *αντιστρόφως ανάλογος* προς τη μάζα του, γεγονός που ακούγεται παράδοξο, μιας και θα περίμενε κανείς ο όγκος να αυξάνεται με τη μάζα! Η αιτιολογία του παραπάνω γεγονότος είναι η εξής: *«όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα του αστέρα τόσο πιο έντονη είναι η βαρυτική του κατάρρευση, άρα τόσο μικρότερο όγκο θα καταλαμβάνει τελικά»*

στ. Τέλος η μάζα ενός Λευκού Νάνου δεν μπορεί να έχει οσοδήποτε μεγάλη τιμή διότι, όσο μεγαλώνει η μάζα, τόσο μεγαλώνει η δύναμη της βαρύτητος που συμπιέζει τα σωματίδια στον πυρήνα, επομένως τόσο μικραίνει η απόσταση Δx μεταξύ τους. Αυτό όμως έχει ένα όριο αφού,

---

[1] *Το 1927 ο Werner Heisenberg διατύπωσε την «αρχή της αβεβαιότητος» (απροσδιοριστίας) η οποία αποτελεί τον θεμέλιο λίθο της κβαντομηχανικής, και σύμφωνα με την οποία δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ακριβώς **και** η θέση **και** η ταχύτητα (ορμή) ενός σωματιδίου. Ο τύπος που εκφράζει την αρχή της αβεβαιότητος είναι:* $\Delta x \cdot \Delta p > h$ *(όπου h η σταθερά του Plank)*

σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητος Δx•Δp>h, αν η απόσταση Δx μειώνονταν συνεχώς θα έπρεπε να αύξανε συνεχώς η ορμή, πράγμα που δεν είναι δυνατό να συμβαίνει διότι η ταχύτητα έχει άνω όριο την ταχύτητα του φωτός.

Όλα αυτά θα τα αναλύσουμε εκτενέστερα, δίδοντας και το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο, στις επόμενες παραγράφους.

2. Βαρυτική κατάρρευση του αστέρα μετά τις θερμοπυρηνικές αντιδράσεις συντήξεως

Οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις συντήξεως που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό του πυρήνα των αστέρων είναι:

- η σύντηξη του Η με θερμοκρασία «ανάφλεξης» $T = 10^7 K$

$$4\,{}^{1}_{1}H \longrightarrow {}^{4}_{2}He + 2e^{+} + 2\nu_e + \text{ενέργεια}$$

- η σύντηξη του παραγόμενου He με θερμοκρασία «ανάφλεξης» $T = 2\cdot 10^8 K$

$${}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He + 100\ KeV \longrightarrow {}^{8}_{4}Be$$

και στη συνέχεια η σύντηξη του παραγόμενου Be με το He σε θερμοκρασίες $T = 2\cdot 10^8 K$

$${}^{8}_{4}Be + {}^{4}_{2}He \longrightarrow {}^{12}_{6}C + 7{,}3\ MeV$$

- τέλος η σύντηξη του C με το He σε θερμοκρασίες $T = 5\cdot 10^8 K$

$${}^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}He \longrightarrow {}^{16}_{8}O + 7{,}15\ MeV$$

Σε αστέρες με μάζα κοντά σ’ αυτή του Ηλίου η πίεση που επιφέρει η βαρυτική κατάρρευση δεν ανεβάζει τη θερμοκρασία[2] παραπάνω από το όριο, πέραν του οποίου να είναι επιτρεπτή η σύντηξη του O, επομένως η αλυσίδα των συντήξεων σταματά εδώ και **τα παραγόμενα στοιχεία που θα μείνουν στον πυρήνα του αστέρα θα είναι:**

He, C, και O

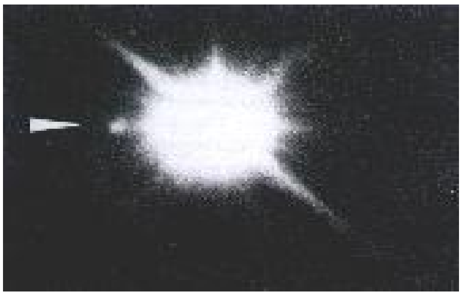
Όταν οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις συντήξεως σταματήσουν, θα σταματήσει και η παραγωγή ενέργειας στο εσωτερικό του αστέρα, με αποτέλεσμα η θερμική πίεση από το εσωτερικό προς τα έξω να εξαντληθεί και κάποτε να σταματήσει. Η βαρυτική πίεση κυριαρχεί! Συστέλλει τον αστέρα

[2] *Όταν η βαρύτητα πιέζει τον αστέρα ελαττώνεται ο όγκος του. Αυξανομένης της πίεσης και ελαττούμενου του όγκου του ο αστέρας αυξάνει τη θερμοκρασία στο εσωτερικό του σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση των αερίων* ***P•V = n•R•T****. Όταν τώρα η μάζα δεν είναι αρκετά μεγάλη η βαρυτική πίεση δεν είναι αρκετή για να επιφέρει αύξηση της θερμοκρασίας ικανή για να ξεκινήσει η σύντηξη βαρύτερων στοιχείων.*

συρρικνώνοντάς τον, μέχρι να βρεθεί κάποιος άλλος μηχανισμός για να τον ισορροπήσει[3].

3. Πυκνότητα της ύλης στο εσωτερικό-απόσταση πυρήνων C

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις συνθήκες πυκνότητας που επικρατούν στο εσωτερικό των Λευκών Νάνων.
Όπως έχουμε πει, οι Λευκοί Νάνοι είναι το αποτέλεσμα της βαρυτικής κατάρρευσης ενός κοινού αστέρα, όταν καταστραφεί η υδροστατική του ισορροπία μετά την εξάντληση των «καυσίμων» του.
Τότε η πίεση της βαρύτητας, μετά την αρχική επικράτησή της επί της ελαττούμενης θερμικής πιέσεως, θα συμπιέσει τόσο την ύλη του αστέρα ώστε οι πυρήνες των στοιχείων που τον αποτελούν να πλησιάσουν σε αποστάσεις που να εκτοπίσουν τα ηλεκτρόνια από τις τροχιές τους και να τα καταστήσουν εκφυλισμένα (ελεύθερα). Ουσιαστικά η ύλη είναι τόσο πυκνή που αποτελείται μόνο από πυρήνες, οι οποίοι στην ουσία εφάπτονται ο ένας στον άλλον χωρίς να αφήνουν κενό χώρο ανάμεσά τους.
Τελικά η πίεση[4] των ελευθέρων ηλεκτρονίων είναι αυτή που θα αναχαιτίσει την βαρυτική κατάρρευση του αστέρα και θα επιφέρει την ισορροπία.
Όλα αυτά περιγράφονται μαθηματικά παρακάτω:
Ο πρώτος Λευκός Νάνος που παρατηρήθηκε (και ο πιο κοντινός σε μας) ήταν ο Σείριος β (συνοδός του λαμπρού Σείριου α) του οποίου από τις μετρήσεις η ακτίνα του δεν θα μπορούσε να υπερβαίνει την ακτίνα της Γης, ενώ η μάζα του υπολογίστηκε ίση με 1.05 $M_{\odot}$. (Σχήμα 1)



Εικόνα 1: Το διπλό σύστημα αστέρων Σείριου Α και Β. Ο Λευκός Νάνος είναι ο συνοδός αστέρας Σείριος Β(βέλος) του οποίου το μέγεθος δεν μπορεί να υπερβαίνει αυτό της Γης

Από τη μάζα και την ακτίνα του Σείριου β υπολογίζουμε εύκολα τη μέση πυκνότητα του αστέρα από τον τύπο:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

ο οποίος επειδή είναι m=1,05 $M_{\odot}$

και $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ γίνεται:

$$\rho = \frac{1,05}{\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}} \cdot M_{\odot}$$

και αν αντικαταστήσουμε όπου r=6.378 km και $M_{\odot}$=1989•10^{33} gr παίρνουμε την πυκνότητα στο εσωτερικό του Σείριου β ίση με:

$$\rho \approx 3 \cdot 10^6 \ gr/cm^3 \qquad (1)$$

Αν υποθέσουμε, χάριν ευκολίας, ότι οι αστέρες αυτοί αποτελούνται μόνον από άνθρακα[5], θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την τυπική απόσταση r_C

---

[3] *Ο μηχανισμός αυτός όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο είναι η πίεση των εκφυλισμένων (ελευθέρων) ηλεκτρονίων(βλέπε παράγραφο 4)*
[4] *Είναι πίεση κβαντομηχανικής προελεύσεως (αρχή της αβεβαιότητος) και περισσότερα γι' αυτήν θα δούμε στην παράγραφο 4.*
[5] *Αν παρατηρήσουμε τις θερμοπυρηνικές αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό του πυρήνα (όπως δίδονται στην παράγραφο 2) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα στοιχεία που θα παραχθούν είναι He, Be, C και O, με το He και Be να επανατροφοδοτούν εκ νέου θερμοπυρηνικές αντιδράσεις συντήξεως και να εξαντλούνται και το O να παράγεται σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες. Επομένως ο C είναι το στοιχείο που κυριαρχεί.*

μεταξύ των πυρήνων του άνθρακα θεωρώντας ότι σε μία σφαίρα ακτίνος r_C υπάρχει μόνο ένα άτομο άνθρακα.
Αφού στη θεωρούμενη σφαίρα ακτίνος r_C υπάρχει μόνον ένα άτομο άνθρακα, θα είναι:

$$n_C = \frac{1}{V_{r_C}} = \frac{1}{\frac{4\pi}{3} \cdot r_C^{\;3}}$$

από την οποία ισοδύναμα παίρνουμε:

$$\frac{4\pi}{3} \cdot r_C^{\;3} \cdot n_C = 1 \tag{2}$$

Όμως από τον ορισμό του μέσου μοριακού βάρους, θα πρέπει: η συνολική μάζα $\mu_C \cdot m_H$ (σε ατομικές μονάδες) να ισούται με τη συνολική μάζα στη μονάδα του όγκου *(πυκνότητα ρ)* διαιρεμένη δια του αριθμού n_C *(αριθμητική πυκνότητα)* των σωματιδίων ανά μονάδα του όγκου.
Δηλαδή θα πρέπει:

$$\mu_C \cdot m_H = \frac{\rho_C}{n_C}$$

από την οποία προκύπτει:

$$\rho_C = n_C \cdot m_H \cdot \mu_C$$

Πιο πάνω όμως υπολογίσαμε την μέση πυκνότητα του Σείριου β και βρήκαμε ότι είναι:

$$\rho_C = 3 \cdot 10^6 \ gr/cm^3$$

επίσης είναι γνωστό το μέσο μοριακό βάρος του άνθρακα μ_C όπως γνωστή είναι και η μάζα του πυρήνα υδρογόνου (m_H).
Επομένως υπολογίζεται εύκολα η ***αριθμητική πυκνότητα*** $\boldsymbol{n_C}$, η οποία βρίσκεται

$$n_C = \frac{\rho_C}{\mu_C \cdot m_H} = 11{,}4 \cdot 10^{29} \ cm^{-3}$$

Έτσι από την εξίσωση (2) παίρνουμε την τιμή για την απόσταση r_C μεταξύ των πυρήνων άνθρακα:

$$r_C = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{4\pi n_C}{3}}} = \mathbf{1{,}2 \cdot 10^{-10} \ cm}$$

Η απόσταση αυτή είναι **κατά δύο τάξεις μικρότερη** από την ακτίνα του πρώτου ηλεκτρονικού φλοιού του ατόμου του υδρογόνου, που είναι $\boldsymbol{\alpha_o = 0{,}5 \cdot 10^{-8}}$ **cm**. Αυτό σημαίνει ότι η ύλη στον Λευκό Νάνο έχει συμπιεστεί τόσο πολύ, ώστε οι πυρήνες των στοιχείων έχουν πλησιάσει πολύ μεταξύ τους, τόσο ώστε έχουν εκτοπίσει τα ηλεκτρόνια ακόμη και του πρώτου ηλεκτρονικού φλοιού.

4. Η πίεση στο εσωτερικό

Η υδροστατική ισορροπία των Λευκών Νάνων επιτυγχάνεται με την αντιστάθμιση της βαρυτικής πιέσεως από την πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων. Το πώς και γιατί γίνεται αυτό θα δούμε παρακάτω.

Βαρυτική πίεση

Η βαρυτική πίεση στο κέντρο των Λευκών Νάνων, όπως είναι φυσικό, είναι συνάρτηση της μάζας M του αστέρα. Η μάζα δε, που περιέχεται σ' ένα λεπτό σφαιρικό φλοιό ακτίνος ***r*** και πάχους ***dr***, θα είναι ανάλογη της πυκνότητος ***ρ*** σε κάθε θέση του αστέρα, δηλαδή θα είναι:

$$dM = 4\pi r^2 .dr.\rho(r)$$ [6]

ή ισοδύναμα:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 .\rho(r)$$

Η τελευταία σχέση ονομάζεται ***εξίσωση συνέχειας της μάζας.***
Αν τώρα κάνουμε την παραδοχή ότι η πυκνότητα στο εσωτερικό του αστέρα είναι σταθερή και ίση με τη μέση πυκνότητά του δηλαδή αν είναι:

$$\prec \rho \succ = \frac{M}{\frac{4\pi r^3}{3}} \Leftrightarrow \prec \rho \succ = \frac{3M}{4\pi r^3}$$

τότε η εξίσωση συνέχειας της μάζας μπορεί να ολοκληρωθεί εύκολα (αφού ο παράγοντας *ρ(r),* που δυσκολεύει την ολοκλήρωση, γίνεται σταθερός-ανεξάρτητος της (*r*) και η ολοκλήρωση δίνει:

$$\int dM = \int 4\pi r^2 \prec \rho \succ dr$$

και ισοδύναμα:

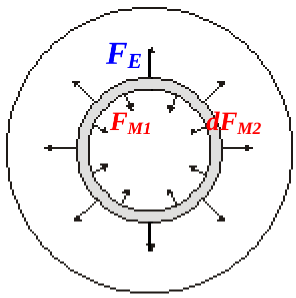
$$M(r) = 4\pi \prec \rho \succ \int r^2 dr$$

και επειδή το $\int r^2 dr = \frac{r^3}{3}$ θα είναι:

$$M(r) = 4\pi \prec \rho \succ \frac{r^3}{3} \Leftrightarrow M(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \prec \rho \succ \qquad (3)$$

Εφόσον όμως ο αστέρας βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία (δηλ. δε συστέλλεται ούτε διαστέλλεται) οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε μία από τις πλευρές κάθε επιφανείας στο εσωτερικό του θα είναι αντίθετες.

Ας θεωρήσουμε τώρα ως μια τέτοια επιφάνεια τον στοιχειώδη εσωτερικό φλοιό ακτίνας *r* και πάχους *dr.* (Σχήμα 1) Αν η πίεση στην εσωτερική επιφάνεια είναι *P* στην εξωτερική επιφάνεια του φλοιού αυτού θα είναι: *P+dP*. (όπου *dP<0* αφού η πίεση ελαττώνεται όσο απομακρυνόμαστε από το κέντρο-πίεση αντιστρόφως ανάλογη της ακτίνας-.)
Η δύναμη F_E με την οποία, το αέριο που περιλαμβάνεται στη σφαίρα ακτίνας *r*, πιέζει την εσωτερική επιφάνεια του φλοιού προς τα έξω



Σχήμα 1: Σχηματική απεικόνιση του στοιχειώδους φλοιού dr

---

[6] *Η πυκνότητα σε κάθε θέση του αστέρα θα είναι συνάρτηση μόνον της αποστάσεως από το κέντρο του αστέρα.*

δίδεται από τη σχέση:

$$F_E = 4\pi r^2.P$$

Η δύναμη F_M που εφαρμόζεται από την άλλη πλευρά της επιφανείας έχει δύο συνιστώσες (ομόρροπες).
Η μία προκύπτει από την πίεση που ασκεί η ύλη του αερίου που βρίσκεται σε αποστάσεις $r' > r + dr$ και πιέζει την εξωτερική επιφάνεια του φλοιού προς τα μέσα και είναι:

$$F_{M_1} = -4\pi r^2 (P + dP) \quad ^{7} \qquad (4)$$

και η δεύτερη προκύπτει από το βάρος της ύλης του στοιχειώδους φλοιού και είναι:

$$dF_{M_2} = -g(r).dm \quad ^{8}$$

όμως

$$dm = dV.\rho(r)$$

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

από τον συνδυασμό των παραπάνω σχέσεων προκύπτει:

$$dF_{M_2} = -g(r).4\pi r^2.dr.\rho(r) \qquad (5)$$

Αφού οι δύο δυνάμεις είναι ομόρροπες θα είναι:

$$F_M = F_{M_1} + dF_{M_2}$$

και αντικαθιστώντας σ' αυτήν τις σχέσεις (4) και (5) παίρνουμε:

$$F_M = -4\pi r^2 (P + dP) - g(r).4\pi r^2.\rho(r).dr \Leftrightarrow$$

$$F_M = -4\pi r^2 [(P + dP) + g(r).\rho(r).dr]$$

Αφού τώρα υφίσταται υδροστατική ισορροπία θα είναι:

$$F_E = -F_M$$

δηλαδή:

$$4\pi r^2.P = -(-4\pi r^2 [(P + dP) + g(r).\rho(r).dr]) \Leftrightarrow$$

$$P = (P + dP) + g(r).\rho(r).dr \Leftrightarrow$$

$$dP = -g(r).\rho(r).dr \qquad (6)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι η ένταση του πεδίου βαρύτητος $g(r)$ εξαρτάται από τη μάζα και την απόσταση από το κέντρο της σφαιρικής κατανομής δηλαδή ότι:

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$$

---

[7] *Το αρνητικό πρόσημο έχει τη έννοια ότι η δύναμη αυτή είναι αντιθέτου φοράς με την* F_E .

[8] *Αν θεωρήσουμε* $g(r)$ *την τιμή της εντάσεως της βαρύτητας σε απόσταση* r *από το κέντρο, τότε το βάρος του στοιχειώδους φλοιού θα ισούται με τη μάζα* dm *που περικλείεται στο φλοιό επί την ένταση του πεδίου βαρύτητος. Το πρόσημο (-) έχει επίσης την έννοια ότι και το βάρος του στοιχειώδους φλοιού έχει αντίθετη φορά με την* F_E

οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση (6) την παραπάνω τιμή της $g(r)$ παίρνουμε

$$dP = -\frac{GM(r)}{r^2}.\rho(r).dr$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται ***εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας.***

Όμως έχουμε κάνει την παραδοχή ότι η πυκνότητα στο εσωτερικό του αστέρα είναι σταθερή και ίση με τη μέση πυκνότητα $\prec \rho \succ$ και λόγω αυτού του γεγονότος υπολογίσαμε τη μάζα σε συνάρτηση της αποστάσεως από το κέντρο του αστέρα, όπως δείχνει η εξίσωση (3).

Αντικαθιστώντας τώρα τις τιμές αυτές για τη μάζα και την πυκνότητα στην εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας παίρνουμε:

$$dP = -\frac{G\frac{4\pi}{3}.\prec \rho \succ .r^3}{r^2}.\prec \rho \succ .dr$$

ή ισοδύναμα:

$$dP = -\frac{4\pi}{3}.G.\prec \rho \succ^2 .r.dr$$

ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση και επειδή η μέση πυκνότητα $\prec \rho \succ$ είναι ανεξάρτητη της αποστάσεως από το κέντρο του αστέρα, παίρνουμε:

$$\int dP = -\frac{4\pi}{3}.G.\prec \rho \succ^2 \int r.dr$$

ή ισοδύναμα:

$$P = -\frac{4\pi}{3}.G.\prec \rho \succ^2 .\frac{r^2}{2}$$

αν τώρα σ' αυτήν αντικαταστήσουμε την τιμή για τη μέση πυκνότητα, που είναι: $\prec \rho \succ = \frac{3M}{4\pi r^3}$ παίρνουμε:

$$P = -\frac{4\pi}{3}.G.\frac{9M^2}{16\pi^2.r^6}.\frac{r^2}{2}$$

και κάνοντας τις απλοποιήσεις καταλήγουμε ότι η βαρυτική πίεση στο εσωτερικό του Λευκού Νάνου είναι:

$$P_{c,WD} = -\frac{3G.M^2}{8\pi.r^4} \quad (7)$$ [9]

Αν τώρα αντικαταστήσουμε στη σχέση αυτή τις αριθμητικές τιμές *$M=M_o=2.10^{33}$ gr* , *$G=6{,}67.10^{-8}$* $gr^{-1}.cm^3.\sec^{-2}$, και *$r=10^9$ cm* [10] θα πάρουμε:

$$P_{c,WD} = -\frac{3.6{,}67.10^{-8}gr^{-1}.cm^3.\sec^{-2}.(2.10^{33})^2 gr^2}{8.3{,}14.(10^9)^4.cm^4} = 3{,}2.10^{22}\frac{dyn}{cm^2} \quad (8)$$

Όμως η θερμική πίεση στο κέντρο ενός τυπικού αστέρα, όπως ο Ήλιος είναι:

$$P_o = 1{,}3.10^{15}\frac{dyn}{cm^2}$$

[9] *Το αρνητικό πρόσημο έχει την έννοια της φοράς του ανύσματος που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι προς το εσωτερικό του αστέρα, αντίθετη αυτής που ασκείται από το εσωτερικό και έχει θεωρηθεί θετική.*

[10] *$r=10^9$cm* είναι κατά προσέγγιση η *ακτίνα ενός τυπικού Λευκού Νάνου*

και συγκρινόμενη με αυτή που βρήκαμε στο εσωτερικό του από την (8), όταν αυτός γίνει Λευκός Νάνος, προκύπτει ότι στον Λευκό Νάνο επικρατούν συνθήκες με πίεση κατά **10 εκατομμύρια** φορές μεγαλύτερη, από αυτή στο εσωτερικό του Ηλίου!!!

Αναλογιζόμενοι το μέγεθος της διαφοράς, τίθεται το ερώτημα: *τι είδους πίεση θα μπορούσε να είναι αυτή που θα αντιστάθμιζε τόσο μεγάλη βαρυτική πίεση, ώστε ο αστέρας να ισορροπήσει και να αποφύγει την βαρυτική κατάρρευση;*

Θερμική πίεση ηλεκτρονίων

Η θερμική πίεση των ηλεκτρονίων είναι η κλασσική πίεση που ασκείται από το εσωτερικό προς τα έξω και οφείλεται στις θερμικές κινήσεις των ηλεκτρονίων, που λόγω των υψηλών θερμοκρασιών που επικρατούν, η ταχύτητά τους είναι υψηλή.

Αν υποθέσουμε ότι το μέσο μοριακό βάρος ανά ηλεκτρόνιο, της ύλης ενός Λευκού Νάνου, είναι μ_e τότε η θερμική πίεση P_ϑ^-, των ηλεκτρονίων στο εσωτερικό του (για αέριο αποτελούμενο από ένα μόνο στοιχείο) είναι[11]:

$$P_\vartheta^- = n^-.k.T = \frac{\rho}{\mu_e.m_p}.k.T$$

Όμως αν δεχθούμε ότι στους Λευκούς Νάνους το μέσο μοριακό βάρος ανά ηλεκτρόνιο είναι $\mu_e = \frac{A}{Z} = 2$, [12] η πυκνότητα είναι $\rho \approx 10^6 gr.cm^{-3}$ και η θερμοκρασία δεν ξεπερνά τους 10^7 K ($T \leq 10^7$ K) τότε αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές στην πιο πάνω εξίσωση, υπολογίζουμε τη θερμική πίεση των ηλεκτρονίων στο εσωτερικό ενός Λευκού Νάνου:

$$P_\vartheta^- \leq 1,7.10^{21} \frac{dyn}{cm^2} \tag{9}$$

Παρατηρούμε συγκρίνοντας τις (8) και (9) ότι η θερμική πίεση είναι τουλάχιστον 20 φορές μικρότερη από τη βαρυτική στο κέντρο ενός Λευκού Νάνου, συνεπώς η θερμική πίεση δεν είναι αρκετή ώστε να αναχαιτίσει τη βαρυτική κατάρρευση.

Θερμική πίεση θετικών ιόντων

Ομοίως υπολογίζουμε ότι ούτε η πίεση των θετικών ιόντων P_ϑ^+ είναι ικανή να αντισταθμίσει τη βαρυτική πίεση, που δίδεται από τη σχέση (8).

Η θερμική πίεση των θετικών ιόντων υπολογίζεται από την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων, η οποία για τα θετικά ιόντα παίρνει τη μορφή:

$$P_\vartheta^+ = n^+.R.T = \frac{\rho}{\mu.m_p}.R.T$$

---

[11] *Η θερμική πίεση στο εσωτερικό του Λευκού Νάνου δίδεται από την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων, η οποία εκφράζεται από τη σχέση:* $P_\vartheta = n.R.T$

[12] *Είναι* $\mu_e = \frac{A}{Z+1}$ *όμως το 1 εκφράζει τον πυρήνα ενώ το Z τον αριθμό των e⁻. Εδώ, αφού μιλάμε για ελεύθερα e, το 1 απουσιάζει από τον παρονομαστή, επομένως είναι* $\mu_e = \frac{A}{Z}$

όμως είναι $\mu = \frac{A}{Z+1}$ και για τα θετικά ιόντα είναι: $\mu = \frac{A}{1} = A$. [13]

Άρα η θερμική πίεση των θετικών ιόντων θα είναι:

$$P_{\vartheta}^{+} = \frac{\rho}{A.m_p}.k.T = \frac{1}{A}.\frac{\rho}{m_p}.k.T$$

Αφού όμως είναι: $1 \leq Z \Leftrightarrow \frac{1}{A} \leq \frac{Z}{A}$ [14] ισοδύναμα παίρνουμε:

$$\frac{1}{A}.(\frac{\rho}{m_p}kT) \leq \frac{Z}{A}.(\frac{\rho}{m_p}kT) \qquad (10)$$

όμως όπως έχουμε δει είναι:

$$P_{\vartheta}^{+} = \frac{1}{A}.\frac{\rho}{m_p}.k.T \quad \text{και} \quad P_{\vartheta}^{-} = \frac{Z}{A}.\frac{\rho}{m_p}.k.T \qquad (11)$$

άρα από τον συνδυασμό των (10) και (11) παίρνουμε:

$$P_{\vartheta}^{+} \leq P_{\vartheta}^{-}$$

Στην προηγούμενη όμως παράγραφο δείξαμε ότι η θερμική πίεση των ηλεκτρονίων δεν είναι αρκετή ώστε να αναχαιτίσει τη βαρυτική κατάρρευση του αστέρα. Επομένως και η θερμική πίεση των θετικών ιόντων που είναι μικρότερη, $P_{\vartheta}^{+} \leq P_{\vartheta}^{-} \leq 1,7.10^{21}\frac{dyn}{cm^2}$, επίσης δεν επαρκεί.

Πίεση εκφυλισμένων ηλεκτρονίων

Η πίεση αυτή είναι κβαντομηχανικής προελεύσεως και η ύπαρξή της στηρίζεται στην ***απαγορευτική αρχή του Pauli***[15] αλλά και στην ***αρχή της αβεβαιότητος του Heisenberg***, μια έκφραση της οποία είναι: *το γινόμενο (Δx).(Δp$_x$) της αβεβαιότητος θέσης επί την αβεβαιότητα της ορμής ενός ελευθέρου σωματιδίου (ηλεκτρονίου) δεν μπορεί να γίνει μικρότερο από τη σταθερά του Plank (h).*

Θα υπολογίσουμε την πίεση αυτή των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων στους Λευκούς Νάνους. Αν η μέση τετραγωνική ταχύτητα των ελευθέρων ηλεκτρονίων είναι $\prec v_e^2 \succ$, τότε η πίεση που ασκούν προς τα έξω, λόγω της κινητικής τους ενέργειας, θα δίδεται από τη σχέση:

---

[13] *Εδώ στη σχέση* $\mu = \frac{A}{Z+1}$ *και αφού μιλάμε για θετικά ιόντα, συνεπάγεται απουσία* e^- *επομένως από τον παρονομαστή θα απουσιάζει το* Z *και έτσι θα είναι:* $\mu = \frac{A}{1} = A$

[14] Είναι Z $\geq$ 1 διότι Z είναι ο ατομικός αριθμός δηλαδή ο αριθμός των πρωτονίων του πυρήνα.

[15] *Είναι μια από τις σημαντικότερες αρχές της κβαντικής φυσικής και διατυπώθηκε το 1925 από τον αυστριακό φυσικό* ***Wolfgang Pauli****. Σύμφωνα μ' αυτή, σ' ένα πεπερασμένων διαστάσεων σύστημα, δύο φερμιόνια (στην περίπτωσή μας ηλεκτρόνια) δεν επιτρέπεται να βρίσκονται στην ίδια ακριβώς κβαντική κατάσταση.*

Αγνοώντας το spin, δύο ελεύθερα e^- *θεωρείται ότι βρίσκονται στην ίδια κβαντική κατάσταση, όταν το γινόμενο της αποστάσεώς τους Δx επί τη διαφορά των ορμών τους Δp$_x$ είναι μικρότερο από τη* ***σταθερά του Plank (h).***

$$P_e = \frac{1}{3}.n_e.m_e.\prec v_e^2 \succ$$ [16]

Αποδεικνύεται[17] ότι:

$$\prec v_e^2 \succ = 3 \prec v_x^2 \succ$$

οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$P_e = n_e.m_e.\prec v_x^2 \succ$$

και επειδή, από τον ορισμό της ορμής, έχουμε: $p = m.v$, για τη μέση τιμή της τετραγωνικής ορμής θα είναι:

$$\prec p_x^2 \succ = m_e^2.\prec v_x^2 \succ$$

οπότε η προηγούμενη σχέση διαμορφώνεται στην:

$$P_e = \frac{n_e.\prec p_x^2 \succ}{m_e} \qquad (12)$$

όπου $\prec p_x^2 \succ$ είναι η μέση τιμή της τετραγωνικής ορμής του e^- κατά τη διεύθυνση x.

Η μέση τετραγωνική τιμή της ορμής μπορεί να προσεγγιστεί (σε τάξη μεγέθους) με τη βοήθεια της αρχής της αβεβαιότητος του Heisenberg σύμφωνα με την οποία είναι: $\Delta p_x \approx \frac{h}{\Delta x}$, της απαγορευτικής αρχής του Pauli και μιας σχέσεως για τη μέση ελεύθερη διαδρομή των ηλεκτρονίων.

Συγκεκριμένα κάνουμε την παραδοχή ότι η ***ύλη είναι ψυχρή,*** δηλαδή σε κάθε κρούση μεταξύ των ηλεκτρονίων, ένα μόνο ηλεκτρόνιο κινείται, ενώ τα υπόλοιπα παραμένουν ακίνητα. Στην περίπτωση αυτή η μέση ελεύθερη διαδρομή τους θα ισούται με την απόσταση των θεωρουμένων ακίνητων ηλεκτρονίων. Όμως ο όγκος που αντιστοιχεί σε κάθε ακίνητο ηλεκτρόνιο ισούται με το αντίστροφο της αριθμητικής πυκνότητος $(n_e = \frac{1e}{V_e} \Rightarrow V_e = \frac{1}{n_e})$.

Αν τώρα είναι *Δx* η μέση απόσταση των ηλεκτρονίων, τότε ο όγκος που αντιστοιχεί στο καθένα απ' αυτά είναι:

$$V_e = \frac{4\pi}{3}(\Delta x)^3$$

Άρα είναι: $\frac{1}{n_e} = \frac{4\pi}{3}.(\Delta x)^3 \Rightarrow (\Delta x)^3 = \frac{3}{4\pi n_e} \Rightarrow \Delta x = (\frac{3}{4\pi n_e})^{\frac{1}{3}}$

Από την αρχή της αβεβαιότητος του Heisenberg όμως ξέρουμε ότι:

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\Delta x}$$

Έτσι αν συνδυάσουμε τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε: $\Delta p_x \approx \frac{h}{(\frac{3}{4\pi}.n_e)^{\frac{1}{3}}}$

---

[16] *Η σχέση αυτή προκύπτει από τον νόμο των τελείων αερίων (για απόδειξη βλέπε «Νόμος των Τελείων Αερίων» , ανάρτηση Απρίλιος 2013, του Ιωάννη Χρ. Αγαπάκη στον ιστότοπο* www.agapakisastro.blogspot.com *)*

[17] *Είναι* $\prec v_e^2 \succ = \prec v_x^2 \succ + \prec v_y^2 \succ + \prec v_z^2 \succ$ *όπου* $\prec v_x^2 \succ, \prec v_y^2 \succ, \prec v_z^2 \succ$ *είναι η μέση τετραγωνική τιμή της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση x, y, z αντίστοιχα. Λόγω συμμετρίας είναι* $\prec v_x^2 \succ = \prec v_y^2 \succ = \prec v_z^2 \succ$ *επομένως είναι* $\prec v_e^2 \succ = \prec v_x^2 \succ + \prec v_x^2 \succ + \prec v_x^2 \succ = 3 \prec v_x^2 \succ$

ή ισοδύναμα: $$\Delta p_x = (\frac{4\pi}{3})^{\frac{1}{3}}.h.n_e^{\frac{1}{3}} \qquad (13)$$

Υποθέτοντας τώρα ότι $(\Delta p_x)^2 = \prec p_x^2 \succ$ από τις σχέσεις (12) και (13) προκύπτει:

$$P_e = \frac{n_e.(\frac{4\pi}{3})^{\frac{2}{3}}.h^2.n_e^{\frac{2}{3}}}{m_e}$$

ή ισοδύναμα: $$P_e = (\frac{4\pi}{3})^{\frac{2}{3}}.\frac{h^2}{m_e}.n^{\frac{5}{3}}$$

Αντικαθιστώντας τέλος την αριθμητική πυκνότητα με το ισοδύναμό της από τη σχέση $n_e = \frac{\rho}{\mu_e.m_p}$ παίρνουμε:

$$P_e = 2,6.(\frac{h^2}{m_e}).(\frac{\rho}{\mu_e.m_p})^{\frac{5}{3}} \qquad (14)$$ [18]

Γνωρίζοντας τώρα ότι $h = 6,626.10^{-27} erg.\sec$, ότι $\mu_e \approx \frac{A}{Z} \approx 2$, $m_e = 9,110.10^{-28} gr$ $m_p = 1,673.10^{-24} gr$ και ότι η μέση πυκνότητα των Λευκών Νάνων (όπως την υπολογίσαμε στην παράγραφο 3) είναι $\rho = 3.10^6 gr/cm^3$ βρίσκουμε, θέτοντας τις παραπάνω τιμές στη σχέση (14), ότι η πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων στο κέντρο των Λευκών Νάνων είναι προσεγγιστικά:

$$P_e = 2,1.10^{22} dyn/cm^3 \qquad (15)$$

Παρατηρούμε, συγκρίνοντας τις (8) και (15), ότι **η πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την βαρυτική πίεση στον πυρήνα ενός Λευκού Νάνου και επομένως θα μπορούσε να συγκρατήσει τη βαρυτική του κατάρρευση.**

5. Σχέση μάζας-ακτίνας των Λευκών Νάνων

Ο όγκος που καταλαμβάνει ένας Λευκός Νάνος είναι αντιστρόφως ανάλογος προς τη μάζα του και αυτό συμβαίνει διότι όσο πιο μεγάλη είναι η μάζα του αστέρα τόσο πιο έντονη είναι και η βαρυτική του κατάρρευση, άρα τόσο πιο μικρό όγκο θα καταλάβει τελικά. Αυτό αποδεικνύεται παρακάτω ως εξής:

Αφού ο αστέρας θα ισορροπήσει ως Λευκός Νάνος, η βαρυτική πίεση $P_{c,WD}$ θα ισούται με την πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων P_e δηλαδή:

$$P_{c,WD} = P_e$$

από την τελευταία όμως σχέση και λόγω των (14) και (7) παίρνουμε τη σχέση:

---

[18] *Το ακριβές αποτέλεσμα, χωρίς τις παραδοχές που κάναμε, είναι* $P_e = 0,0485.(\frac{h^2}{m_e}).(\frac{\rho}{\mu_e.m_p})^{\frac{5}{3}}$ *και διαφέρει από τη σχέση (5) μόνο κατά την τιμή του αριθμητικού συντελεστή, ο οποίος αντί 2,6 θα έπρεπε να ήταν 0,0485.*

$$\frac{3G.M^2}{8\pi.r^4} = 2,6.(\frac{h^2}{m_e}).(\frac{\rho}{\mu_e.m_p})^{\frac{5}{3}}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε την πυκνότητα ρ ίση με τη μέση πυκνότητα $\prec \rho \succ = \frac{3M}{4\pi r^3}$ τότε η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{3G.M^2}{8\pi.r^4} = 2,6.(\frac{h^2}{m_e}).(\frac{\frac{3M}{4\pi r^3}}{\mu_e.m_p})^{\frac{5}{3}}$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{3G.M^2}{8\pi.r^4} = 2,6.(\frac{h^2}{m_e}).(\frac{3M}{4\pi.\mu_e.m_p})^{\frac{5}{3}}.\frac{1}{r^5}$$

Τέλος λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς την ακτίνα *r* παίρνουμε την:

$$r = 5,1.\frac{h^2}{G.m_e.m_p{}^{5/3}.\mu^{5/3}}.\mathrm{M}^{-1/3} \qquad (16)$$

Η σχέση αυτή σημαίνει ότι ***η ακτίνα του Λευκού Νάνου είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του***, γεγονός εντελώς αντίθετο από τις συνηθισμένες εμπειρίες μας, σύμφωνα με τις οποίες, η αύξηση της μάζας ενός σώματος συνεπάγεται (για σταθερή πυκνότητα ρ) αύξηση των γραμμικών του διαστάσεων (δηλαδή αύξηση της ακτίνας του).
Στους Λευκούς Νάνους λοιπόν, όταν αυξάνει η μάζα δεν αυξάνει και η ακτίνα τους, (αντιθέτως αυτή μικραίνει) αλλά αυτή που αυξάνει είναι η πυκνότητα, λόγω της μεγαλύτερης βαρυτικής κατάρρευσης.

6. Μάζα των Λευκών Νάνων - Όριο Chandrasekhar

Η μάζα ενός Λευκού Νάνου δεν μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλη τιμή. Τα όρια στα οποία κινείται η διακύμανση της μάζας των Λευκών Νάνων θα εξετάσουμε στην παράγραφο αυτή.
Έστω ότι η μάζα ενός Λευκού Νάνου, για κάποιαν αιτία, άρχιζε να αυξάνει, τότε κάποια στιγμή θα υπερέβαινε την ηλιακή μάζα ($M>M_o$). Η τεράστια δύναμη της βαρύτητας θα συμπίεζε τον αστρικό πυρήνα σε τέτοιο βαθμό, ώστε οι αποστάσεις $Δx$ μεταξύ των σωματιδίων (πυρήνων He και H) θα γινόταν εξαιρετικά μικρές. Λόγω όμως της αρχής της αβεβαιότητας του Heisenberg ($Δx.Δp_x>h$) η ορμή $Δp_x$ των σωματιδίων θα πρέπει να γίνεται εξαιρετικά μεγάλη. Αφού όμως είναι $p_x=m.v_x$ και αφού η ταχύτητα v_x έχει ανώτατο όριο, αυτό της ταχύτητος του φωτός *c*, έπεται ότι η ορμή $Δp_x$ δεν μπορεί να αυξάνει επ' άπειρον, πράγμα που σημαίνει (με τον αντίστροφο συλλογισμό) ότι και η απόσταση $Δx$ μεταξύ των σωματιδίων θα πρέπει να έχει ένα κατώτατο όριο, άρα και η μάζα M του Λευκού Νάνου θα πρέπει να έχει ένα ανώτατο όριο. Συνεπώς η πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων θα πρέπει να αυξάνει με συνεχώς φθίνοντα ρυθμό, καθώς αυξάνει η μάζα του Λευκού Νάνου.
Η σχέση της πίεσης των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων υπολογίσαμε σε προηγούμενη παράγραφο ότι είναι:

$$P_e = n_e.m_e.\prec v_x{}^2 \succ$$

και αφού κατά προσέγγιση είναι $\prec v_x{}^2 \succ = \prec v_x \succ . \prec v_x \succ$ και αφού

$$\prec v_x \succ = \frac{\prec p_x \succ}{m_e}$$

η παραπάνω σχέση παίρνει τη μορφή:

$$P_e = n_e.m_e.\prec v_x \succ.\frac{\prec p_x \succ}{m_e} \Leftrightarrow P_e = n_e.\prec v_x \succ.\prec p_x \succ$$

ή ισοδύναμα:

$$P_e = (\frac{4\pi}{3})^{\frac{1}{3}}.h.n_e^{\frac{4}{3}}.\prec v_x \succ$$

η τελευταία προέκυψε με την αντικατάσταση της μέσης τιμής της ορμής

$$\prec p_x \succ = (\frac{4\pi}{3})^{\frac{1}{3}}.h.n_e^{\frac{1}{3}}$$

από τη σχέση (13) της παραγράφου 4.
Αν τώρα ως μέση ταχύτητα $\prec v_x \succ$ πάρουμε τη μεγίστη δυνατή ταχύτητα στο Σύμπαν (την ταχύτητα του φωτός c) δηλαδή αν $\prec v_x \succ = c$, τότε η πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων που έχουν την ταχύτητα του φωτός θα είναι:

$$P_e = (\frac{4\pi}{3})^{\frac{1}{3}}.h.c.n_e^{\frac{4}{3}}$$

και η ακριβής λύση[19] του προβλήματος είναι:

$$P_e = 0,123.h.c.n_e^{\frac{4}{3}} \tag{17}$$

Όταν τώρα η βαρυτική πίεση ισορροπείται από την πίεση των σχετικιστικώς κινουμένων εκφυλισμένων ηλεκτρονίων (e με ταχύτητα c), έχουμε την ισότητα:

$$P_{c,WD} = P_e$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{3}{8\pi}.\frac{G.M^2}{R^4} = 0,123.h.c.n^{\frac{4}{3}}$$

και επειδή, όπως στην παράγραφο 3 δείξαμε, είναι $n_e = \frac{\rho}{\mu_e.m_p}$

παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\frac{3}{8\pi}.\frac{G.M^2}{R^4} = 0,123.h.c.(\frac{\rho}{\mu_e.m_p})^{\frac{4}{3}}$$

αν τώρα θέσουμε αντί της πυκνότητας ρ το ισοδύναμό της $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}$

έχουμε:

$$\frac{3}{8\pi}.\frac{G.M^2}{R^4} = 0,123.h.c.(\frac{M}{\frac{4\pi}{3}.R^3.\mu_e.m_p})^{\frac{4}{3}}$$

---

19 *Η ακριβής λύση προκύπτει αν κάνουμε τους υπολογισμούς χωρίς προσεγγίσεις και απλουστεύσεις, όπως π.χ της μορφής:* $\prec v_x^2 \succ = \prec v_x \succ.\prec v_x \succ$

και κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε:

$$\frac{3}{8\pi}.\frac{G.M^2}{R^4}=0,123.(\frac{3}{4\pi})^{\frac{4}{3}}.\frac{M^{4/3}}{(\mu_e.m_p)^{4/3}.R^4}h.c$$

Τέλος απλοποιώντας (διώχνοντας) από τα δύο μέλη το R^4, κάνοντας τις πράξεις των αριθμητικών παραγόντων [$\frac{3}{8\pi}$, $(\frac{3}{4\pi})^{\frac{4}{3}}$ και 0,123] και λύνοντας ως προς M, βρίσκουμε ότι η τιμή για τη μάζα είναι:

$$M_{Ch}=0,06.(\frac{h.c}{G})^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{\mu_e{}^2.m_p{}^2}$$

και αφού το ιονισμένο αέριο αποτελείται από ελεύθερα ηλεκτρόνια, θα είναι $\mu_e=\frac{A}{Z}$, έπεται ότι ο Λευκός Νάνος θα ισορροπεί για τη συγκεκριμένη τιμή μάζας:

$$M_{Ch}=0,06.(\frac{Z}{A})^2(\frac{h.c}{G})^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{m_p{}^2} \quad (18)$$

η οποία ονομάζεται ***όριο Chandrasekhar*** [20] και μετά τους υπολογισμούς βρίσκεται ότι είναι:

$$M_{Ch} = 1,46\ M_\odot$$

Η τιμή αυτή είναι η μοναδική τιμή για τη μάζα ώστε ο αστέρας να ισορροπεί. Για οποιαδήποτε άλλη τιμή, μεγαλύτερη ή μικρότερη, ο αστέρας είναι ασταθής. Για μικρότερες τιμές η πίεση δεν περιγράφεται από τη σχέση (17), οπότε το αποτέλεσμα δεν έχει φυσική σημασία.
Για μεγαλύτερες τιμές όμως η πίεση περιγράφεται από τη σχέση (17) και η φυσική σημασία του αποτελέσματος είναι ότι, αν ο Λευκός Νάνος είχε μάζα $M>M_{Ch}$, αυτός ή θα είχε μετατραπεί σε Αστέρα Νετρονίων, ή σε Μελανή Οπή.[21]

7. Επίλογος

Οι λευκοί νάνοι είναι αρκετά συνηθισμένοι, το 6% περίπου όλων των αστέρων στην περιοχή του Γαλαξία μας είναι στην πραγματικότητα λευκοί νάνοι, γεγονός που οφείλεται στο ότι όλοι οι αστέρες με μάζα μικρότερη από 1,44 $M_\odot$ δίνουν λευκούς νάνους[22].

---

[20] *Προς τιμήν του ινδού φυσικού Subrahmanyan Chandrasekhar που απέδειξε τη σχέση (18)*

[21] *Στην πρώτη περίπτωση η βαρυτική κατάρρευση του αστέρα συνεχίζει έως το σημείο που η ύλη του συμπιέζεται τόσο που οι αποστάσεις των σωματιδίων της είναι μικρότερες της πυρηνικής ακτίνας, επομένως οι πυρήνες της ύλης έχουν διεισδύσει ο ένας στον άλλον, εκτοπίζοντας τα νετρόνια, εκφυλίζοντάς τα, καθιστώντας τα φερμιόνια με κβαντικές ιδιότητες των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων που περιγράψαμε παραπάνω. Η βαρυτική πίεση τελικά θα ισορροπηθεί από την πίεση των εκφυλισμένων νετρονίων.*
Στη δεύτερη περίπτωση η βαρυτική κατάρρευση δε σταματάει πουθενά, αφού δεν υπάρχει κανείς μηχανισμός που να αντισταθμίσει την ολοένα αυξανόμενη βαρυτική πίεση και η ύλη καταρρέει στην ίδια την ύλη δημιουργώντας έτσι μία σημειακή ανωμαλία στην οποία η βαρύτητα γίνεται άπειρη και η ακτίνα μηδενική!

[22] *Πρέπει να σημειωθεί ότι και αστέρες με μεγαλύτερη μάζα από 1,44 της ηλιακής, μέχρι και 8 ηλιακές μάζες, δίνουν λευκούς νάνους, αφού το μεγαλύτερο μέρος της ύλης τους εκτινάσσεται μακριά κατά τον θάνατό τους και αφού μετά από αυτό η παραμένουσα μάζα είναι <1,44 $M_\odot$ (όριο Chandrasekhar).*

Αφού φθάσει στην κατάσταση του λευκού νάνου ένας αστέρας και σταθεροποιηθεί εκεί, κατόπιν αρχίζει η ψύξη του.
Η αρχική θερμότητα που κληρονόμησε ο λευκός νάνος προέρχεται όχι μόνο από εκείνη που παρέμεινε από την παραγωγή ενέργειας με θερμοπυρηνικές αντιδράσεις στον προγεννήτορά τους αστέρα, αλλά κυρίως από τη βαρυτική δυναμική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά τη βαρυτική κατάρρευση των κεντρικών περιοχών του παλαιού αστέρα.
Τη θερμότητα αυτή θα ξοδέψει ο λευκός νάνος ακτινοβολώντας φως και λοιπή ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία στο διάστημα, σύμφωνα με τους γνωστούς νόμους της ακτινοβολίας μέλανος σώματος[23], χωρίς να μπορεί να την αναπληρώσει στο παραμικρό αφού ένας λευκός νάνος είναι αδρανές, νεκρό αντικείμενο. Επειδή όμως η έκταση της ακτινοβολούσας επιφάνειάς του είναι ελάχιστη σε σχέση με τη μάζα του, ο λευκός νάνος θα παραμείνει υπέρθερμος επί πολλά δισεκατομμύρια χρόνια!!!
Υπάρχουν ενδείξεις ότι το εσωτερικό των λευκών νάνων κρυσταλλώνεται αργά καθώς ψύχονται και τελικώς καταλήγει σε κάτι που μοιάζει με τον κρύσταλλο ενός διαμαντιού[24].
Μετά από δεκάδες δισεκατομμύρια χρόνια, ο κάθε λευκός νάνος θα κρυώσει τόσο ώστε να εκπέμπει πλέον ελάχιστη ακτινοβολία και καθόλου ορατό φως, οπότε θα έχει καταστεί ένας **μαύρος (ή καφέ) νάνος**.
Κανένας μαύρος νάνος δεν πρέπει να υφίσταται στην πράξη στο Σύμπαν μας, επειδή το Σύμπαν είναι πολύ νεαρό για κάτι τέτοιο[25].
Οι ψυχρότεροι λευκοί νάνοι που έχουν εντοπισθεί έχουν επιφανειακή θερμοκρασία γύρω στους 3900 Κ (ή 3600 περίπου βαθμούς Κελσίου), και η ψύξη επιβραδύνεται με την πάροδο του χρόνου[26].

Ιωάννης Χρ. Αγαπάκης

---

[23] *Για την ακτινοβολία Μέλανος Σώματος βλέπε Σημειώσεις Κβαντομηχανικής Στυλιανού Μάσσεν (έκδοση Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης)*
[24] *Οι αστρονόμοι γνωρίζουν ένα τουλάχιστο «διαμαντένιο» λευκό νάνο, τον **BPM 37093***
[25] *Συνολικά, ένας λευκός νάνος με μάζα τη μισή μάζα του Ήλιου και αρχική θερμοκρασία 20.000 Κ χρειάζεται περί τα 25 δισεκατομμύρια χρόνια (δηλαδή το διπλάσιο της ηλικίας του Σύμπαντος) για να ψυχθεί μέχρι τη θερμοκρασία θερμοδυναμικής ισορροπίας με το περιβάλλον του που είναι λίγοι μόνο βαθμοί πάνω από το απόλυτο μηδέν!*
[26] *Χρειάζεται ίσος χρόνος για την ψύξη από τους 20.000 Κ στους 5000 Κ με τον χρόνο για την ψύξη από τους 5000 Κ στους 4000 Κ.*