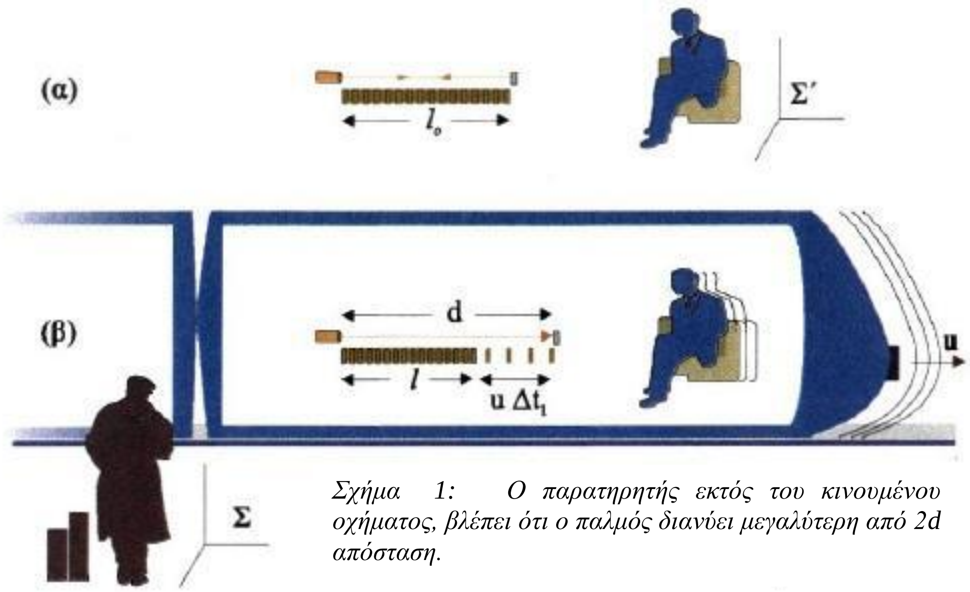
Η ΣΥΣΤΟΛΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ
ΣΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΟΣ

Μία άμεση συνέπεια της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας είναι η ***Συστολή του Μήκους*** σύμφωνα με την οποία:

ένα αντικείμενο το οποίο κινείται με ταχύτητα u έχει μετρούμενο μήκος μικρότερο από το μήκος ηρεμίας του (ιδιομήκος ℓ_o) κατά έναν παράγοντα

Για να αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση θα θεωρήσουμε ένα κινούμενο προς τα δεξιά με ταχύτητα u όχημα. Μέσα στο όχημα έχει τοποθετηθεί με το μήκος του κατά τη διεύθυνση κινήσεως, ένας χάρακας. Στο αριστερό άκρο του χάρακα στερεώνουμε μία πηγή φωτεινών ακτίνων και στο άλλο του άκρο έναν καθρέπτη. (Σχήμα 1)



Σχήμα 1: Ο παρατηρητής εκτός του κινουμένου οχήματος, βλέπει ότι ο παλμός διανύει μεγαλύτερη από 2d απόσταση.

Για τον παρατηρητή που ταξιδεύει μαζί με το όχημα (αδρανειακό σύστημα Σ΄) ο χρόνος που απαιτείται μια φωτεινή ακτίνα, εκπεμπόμενη από την πηγή, να ανακλαστεί στον καθρέπτη και να επιστρέψει στην πηγή θα δίδεται από τη σχέση:

$$\Delta t_o = 2\,\ell_o/c \qquad (4.1)$$

όπου ℓ_o το μήκος του χάρακα, όπως το αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής του Σ΄ και c η ταχύτητα του φωτός.

Ας μελετήσουμε τι βλέπει ο ακίνητος παρατηρητής στην αποβάθρα (αδρανειακό σύστημα Σ). Γι’ αυτόν η ακτίνα, ξεκινώντας από την πηγή, θα φθάσει στον καθρέπτη διανύοντας απόσταση:

$$d = \ell + u.\Delta t_1 \qquad (4.2)$$

και αντίθετα για να επιστρέψει στην πηγή θα διανύσει απόσταση:

$$d' = \ell - u.\Delta t_2 \qquad (4.3)$$

όπου ℓ το μήκος του χάρακα, όπως το αντιλαμβάνεται ο ακίνητος παρατηρητής στην αποβάθρα.
Επειδή όμως το φως μεταδίδεται με την ίδια ταχύτητα (σύμφωνα με το αξίωμα της Θεωρίας της Σχετικότητας) θα έχουμε:

$$d = c.\Delta t_1 \quad \text{και} \quad d' = c.\Delta t_2$$

και σε συνδυασμό με τις σχέσεις (4.2) και (4.3) παίρνουμε:

$$\ell + u.\Delta t_1 = c.\Delta t_1 \quad \text{και} \quad \ell - u.\Delta t_2 = c.\Delta t_2$$

από τις οποίες λύνοντας ως προς Δt_1 και Δt_2 αντίστοιχα παίρνουμε:

$$\Delta t_1 = \frac{\ell}{c-u} \quad \text{και} \quad \Delta t_2 = \frac{\ell}{c-u} \qquad (4.4)$$

Ο συνολικός χρόνος, που θα χρειαστεί το φως από τη στιγμή που θα φύγει από την πηγή μέχρι να επιστρέψει σ’ αυτή, ισούται με το άθροισμα των επί μέρους χρόνων της σχέσης (4.4). Έτσι θα είναι:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{\ell}{c+u} + \frac{\ell}{c-u}$$

όπου κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα και μετά τις πράξεις προκύπτει:

$$\Delta t = \frac{\ell(c-u)+\ell(c+u)}{c^2-u^2} = \frac{\ell c - \ell u + \ell c + \ell u}{c^2-u^2} = \frac{2\ell c}{c^2-u^2}$$

τέλος διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το c^2 η παραπάνω σχέση παίρνει την ισοδύναμη μορφή:

$$\Delta t = \frac{\frac{2\ell c}{c^2}}{\frac{c^2-u^2}{c^2}} = \frac{\frac{2\ell}{c}}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{2\ell}{c.(1-\frac{u^2}{c^2})} \qquad (4.5)$$

όμως στην προηγούμενη παράγραφο (Διαστολή του Χρόνου) συμβολίσαμε ως

$$\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$$

άρα θα είναι:

$$\gamma^2 = \frac{1}{(1-\frac{u^2}{c^2})}$$

και επομένως η σχέση (4.5) γίνεται:

$$\Delta t = \frac{2\ell.\gamma^2}{c} \qquad (4.6)$$

Μια από τις συνέπειες της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητος είναι η Διαστολή του Χρόνου (βλέπε ανάρτηση της 13 Απρ 2013). Η σχέση που εκφράζει τη διαστολή του χρόνου είναι: $\Delta t = \gamma.\Delta t_o$. Έτσι λόγω αυτής η (4.6) παίρνει τη μορφή:

$$\gamma.\Delta t_o = \frac{2\ell.\gamma^2}{c}$$

και ισοδύναμα:

$$\Delta t_o = \frac{2\ell.\gamma}{c}$$

και αφού από την (4.1) είναι $\Delta t_o = 2\ell_o/c$, θα έχουμε τελικά:

$$\frac{2\ell_o}{c} = \frac{2\ell.\gamma}{c}$$

όπου μετά τις απλοποιήσεις καταλήγουμε στη σχέση:

$$\ell_o = \ell.\gamma \quad \text{ή} \quad \boxed{\ell = \ell_o.\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad (4.7)$$

η οποία δηλώνει τη συστολή του μήκους, δηλαδή ότι:

το μήκος που μετράει ένας ακίνητος παρατηρητής και το οποίο κινείται μαζί με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι μικρότερο, κατά έναν συντελεστή γ, από το μήκος που μετράει παρατηρητής που βρίσκεται πάνω στο σύστημα αναφοράς και κινείται μαζί του.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Σε αναλογία με τον ιδιοχρόνο ορίζεται το ***ιδιομήκος*** ενός αντικειμένου ως «*το μήκος που έχει το αντικείμενο αυτό στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο ηρεμεί*».
2. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η συστολή του μήκους συμβαίνει μόνο κατά τη διεύθυνση της κινήσεως και αυτό μπορούμε να το δικαιολογήσουμε παρατηρώντας στην καταληκτική σχέση (4.7) ότι η συστολή είναι αποτέλεσμα της κίνησης του αντικειμένου με ταχύτητα u, εξαρτάται δηλαδή από την ταχύτητα. Άρα στις άλλες διευθύνσεις του συστήματος αναφοράς (κάθετες), που οι συνιστώσες της ταχύτητας είναι μηδέν, δεν παρατηρείται το φαινόμενο της συστολής
3. Τέλος θα πρέπει να σημειώσουμε ότι στην πραγματικότητα δε συστέλλεται το ίδιο το αντικείμενο, αλλά η μέτρησή του από ένα άλλο σύστημα αναφοράς. Έτσι είναι ο χώρος που παραμορφώνεται και όχι το αντικείμενο, όπως και

στην περίπτωση της διαστολής του χρόνου είναι ο χρόνος εκείνος που παραμορφώνεται όταν τα κινούμενα ρολόγια πηγαίνουν πιο αργά και όχι τα ίδια τα ρολόγια. Δηλαδή η σωστή έκφραση είναι ότι η κίνηση των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς επιφέρει παραμόρφωση του χωροχρόνου δηλαδή των συνθηκών που επικρατούν στις διάφορες περιοχές του.

Ιωάννης Χρ. Αγαπάκης