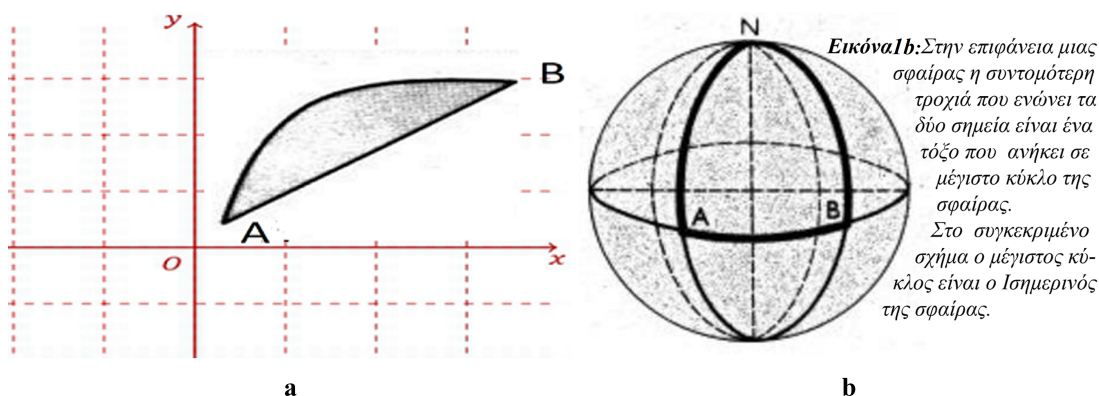


ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

Οι Γεωδαισιακές Καμπύλες είναι γραμμές ελάχιστου μήκους που συνδέουν δύο σημεία του χωροχρόνου.

Συγκεκριμένα στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) αν ένα σώμα πρόκειται να κινηθεί από ένα σημείο A σε σημείο B, η τροχιά που θα ακολουθήσει είναι η πιο σύντομη απόσταση που συνδέει αυτά τα δύο σημεία του χωροχρόνου. Η τροχιά αυτή ονομάζεται γεωδαισιακή καμπύλη.

Στην περίπτωση του διδιάστατου επίπεδου χώρου, είναι φανερό ότι η γεωδαισιακή καμπύλη θα είναι μία ευθεία γραμμή. Πράγματι (σύμφωνα με την Ευκλείδειο Γεωμετρία) η πιο σύντομη γραμμή που ενώνει δύο σημεία του επιπέδου είναι η ευθεία γραμμή. (Εικόνα 1a)



Εικόνα 1: (a) Στον επίπεδο χώρο η πιο σύντομη γραμμή που ενώνει δύο σημεία είναι η ευθεία. (b) Η γεωδαισιακή καμπύλη (AB) στην επιφάνεια μιας τριδιάστατης σφαίρας.

Εάν ο χώρος είναι σφαίρα, τότε η ελάχιστη απόσταση μεταξύ των σημείων A και B, που βρίσκονται στην επιφάνεια αυτής της σφαίρας, μετράται πάνω στον μέγιστο κύκλο¹ της σφαίρας που ενώνει τα δύο σημεία². (Εικόνα 1b)

Από τα δύο παραπάνω παραδείγματα γεωδαισιακών στον επίπεδο και καμπύλο χώρο προκύπτει το συμπέρασμα ότι η γεωδαισιακή καμπύλη είναι η γενίκευση της ευθείας γραμμής σε καμπύλους χώρους. Με άλλα λόγια, στους μη Ευκλείδειους χώρους, η έννοια της γεωδαισιακής καμπύλης αντικαθιστά την έννοια της ευθείας.

¹Θυμίζουμε ότι μέγιστος κύκλος μιας σφαίρας είναι ο κύκλος που γράφεται πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας και διέρχεται από το κέντρο της

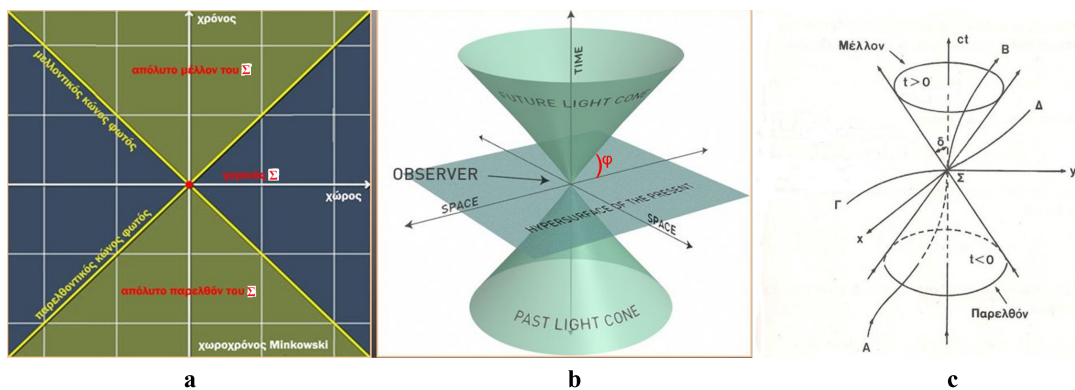
²Μια εφαρμογή αυτής της ιδιότητας των γεωδαισιακών καμπυλών της σφαίρας, δηλαδή ότι είναι καμπύλες ελάχιστου μήκους που ενώνουν δύο σημεία πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, χρησιμοποιούν οι αεροπορικές εταιρίες στέλλοντας τα αεροπλάνα τους να πετούν πάνω από τους μέγιστους κύκλους της Γης για να γράψουν μ' αυτόν τον τρόπο την μικρότερη τροχιά.

Μια φυσική ερμηνεία των γεωδαισιακών καμπυλών προέρχεται από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας³ (ΓΘΣ). Σύμφωνα με την θεωρία αυτή, τα σώματα (τόσο τα υλικά, π.χ. η Γη, όσο και το φως) όταν κινούνται ελεύθερα (δηλαδή μόνον υπό την επίδραση του βαρυτικού πεδίου στο οποίο βρίσκονται) δεν ακολουθούν οποιεσδήποτε τροχιές, αλλά τις γεωδαισιακές διαδρομές του τετραδιάστατου Χωροχρόνου.

Οι γεωδαισιακές καμπύλες χαρακτηρίζονται ως **χρονοειδείς** (*time-like*), **χωροειδείς** (*space-like*) και **φωτοειδείς** (*light-like*) ανάλογα με το πρόσημο του μέτρου του εφαπτόμενου διανύσματος της γεωδαισιακής καμπύλης.

Συγκεκριμένα το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος u^μ μιας γεωδαισιακής καμπύλης είναι: $|u|^2 = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$, έτσι αν

- $|u|^2 < 0$ το διάνυσμα είναι **χρονοειδές** και η καμπύλη χρονοειδής
- $|u|^2 > 0$ το διάνυσμα είναι **χωροειδές** και η καμπύλη χωροειδής, και αν
- $|u|^2 = 0$ το διάνυσμα είναι **φωτοειδές** και η καμπύλη φωτοειδής⁴.



Εικόνα 2: (α) Ο κώνος φωτός του χωροχρόνου Minkowski σε διδιάστατη μορφή. (β) Η γωνία φ μιας γενέτειρας του κώνου φωτός και της υπερεπιφάνειας του παρόντος. (γ) Η γωνία δ μιας γενέτειρας του κώνου και του χρονικού άξονα ct . Πηγή Εικόνων: (α), (β) διαδίκτυο, (γ) βιβλιογρ. [3]

Κώνος φωτός και η σχέση με τις γεωδαισιακές.

Πολύ σημαντική στο πεδίο της κοσμολογίας είναι η έννοια του κώνου φωτός (*light*

³Για την ακρίβεια οι εξισώσεις της ΓΘΣ μας δίνουν τη δυνατότητα να γνωρίσουμε τις ιδιότητες του χωροχρόνου σε ένα βαρυτικό πεδίο. Περιγράφουν δηλαδή την καμπυλότητα του χωροχρόνου, δεν εξηγούν όμως πώς θα κινηθούν τα σώματα σε αυτόν τον καμπυλωμένο χώρο. Για να αντιμετωπίσουμε αυτή τη δυσκολία, υποθέτουμε ότι τα σώματα και οι ακτίνες φωτός κινούνται μέσα στον χωροχρόνο με τον πιο αποτελεσματικό (λιγότερο ενεργοβόρο) τρόπο. Έτσι η τροχιά που θα ακολουθήσει θα πρέπει να είναι η πιο σύντομη, δηλαδή, η γεωδαισιακή τροχιά. Οι εξισώσεις που πρέπει να λυθούν για να γίνει σωστή η τροχιά που θα ακολουθήσει ένα σώμα ή μία ακτίνα φωτός ονομάζονται γεωδαισιακές εξισώσεις.

⁴Τα παραπάνω ισχύουν για *signature*(+, -, -, -) δηλαδή για ένα χωροχρόνο του οποίου το γραμμικό στοιχείο έχει θετικό το χρονικό και αρνητικά τα χωρικά του στοιχεία.

cone). Στην ειδική και γενική σχετικότητα, ένας κώνος φωτός είναι το μονοπάτι, (η διαδρομή) που θα διανύσει μια ακτίνα φωτός, που προέρχεται από ένα μόνο γεγονός στο χωροχρόνο (εντοπισμένο σε ένα μόνο σημείο στο διάστημα και μια στιγμή στο χρόνο) και ταξιδεύει προς όλες τις κατευθύνσεις.

Η σύνδεση των γεωδαισιακών καμπυλών με την έννοια του κώνου φωτός προκύπτει από την παρακάτω πρόταση που αποτελεί άλλον ένα ορισμό του κώνου φωτός.

Αν δοθεί ένα σημείο του χωροχρόνου, τότε υπάρχουν άπειρες φωτοειδείς γεωδαισιακές γραμμές που περνούν από αυτό το σημείο. Όλες οι εφαπτόμενες αυτών των φωτοειδών γεωδαισιακών γραμμών σχηματίζουν μία κωνική επιφάνεια στο σημείο αυτό του χωροχρόνου που ονομάζεται κώνος φωτός⁵.

Το ανώτερο τμήμα του κώνου, όπου $t > 0$,⁶ ονομάζεται **κώνος φωτός μέλλοντος**. Αντίστοιχα το κατώτερο τμήμα του κώνου, όπου $t < 0$,⁷ ονομάζεται **κώνος φωτός παρελθόντος**.

Ένα ανάλογο του Κώνου Φωτός από την κυματική

Μια αισθητική προσπάθεια κατανόησης του κώνου φωτός έρχεται από την κυματική.

Σε κάποια χρονική στιγμή – αρχή των χρόνων – ρίχνουμε ένα βότσαλο στη λίμνη και παίρνουμε φωτογραφίες ανά ίσα χρονικά διαστήματα.

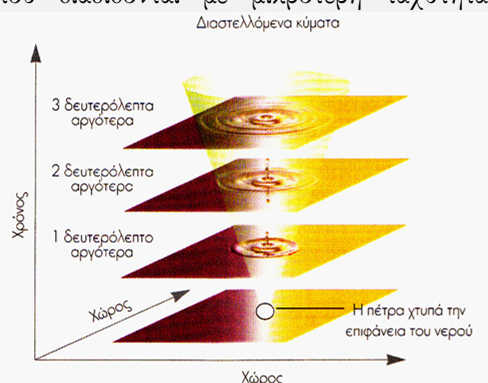
Το πρώτο στιγμιότυπο είναι το «γεγονός» της συνάντησης του βότσαλου με την ακίνητη επιφάνεια του νερού και αντιστοιχεί σε ένα σημείο (Σ) ενώ τα υπόλοιπα στιγμιότυπα αντιστοιχούν σε εικόνες κύκλων, καθένας από τους οποίους έχει ακτίνα ίση με το γινόμενο «ταχύτητα διάδοσης του κύματος επί χρόνο».

Αν τοποθετήσουμε τις φωτογραφίες σε οριζόντια επίπεδα τα οποία να ισαπέχουν, την μία πάνω στην άλλη, οι περιφέρειες των οριζόντιων κύκλων, που μεγαλώνουν σε κάθε φωτογραφία, δημιουργούν την επιφάνεια ενός κώνου με την κορυφή προς τα κάτω.

Κάθε σημείο της κωνικής αυτής επιφάνειας αναπαριστά ένα ΓΕΓΟΝΟΣ την άφιξης του

κύματος σε κάποιο σημείο του χώρου και του χρόνου.

Τα σημεία του εσωτερικού της κωνικής επιφάνειας αντιστοιχούν σε ενδεχόμενες αφίξεις υποθετικών κυμάτων που διαδίδονται με μικρότερη ταχύτητα.



Εικόνα Πλαισίου: Χωροχρονικό διάγραμμα από την κυματική. Ο διαστελλόμενος κύκλος σχηματίζει στο χωροχρόνο έναν κώνο με δύο χωρικές διαστάσεις και μία χρονική. (Πηγή: Το χρονικό του χρόνου [4])

⁵Με άλλα λόγια ο κώνος φωτός ενός γεγονότος του χωροχρόνου είναι το σύνολο των εφαπτομένων των φωτοειδών γεωδαισιακών γραμμών στο σημείο (γεγονός) του χωροχρόνου.

⁶Πάνω από την hypersurface of the present (υπερεπιφάνεια του παρόντος) (βλ. Εικόνα 2b), όπου η χρονική συντεταγμένη είναι θετική

⁷Κάτω από την hypersurface of the present (βλ. Εικόνα 2b), όπου η χρονική συντεταγμένη είναι αρνητική

Η γεωδαισιακή υπόθεση

Όπως έχουμε δει οι φωτοειδείς γεωδαισιακές με τα εφαπτόμενα διανύσματά τους δημιουργούν την επιφάνεια του κώνου φωτός. Οι χρονοειδείς καμπύλες που περνούν από το δεδομένο σημείο βρίσκονται **μέσα** στην κωνική επιφάνεια, ενώ οι χωροειδείς καμπύλες που περνούν από το ίδιο σημείο βρίσκονται **έξω** από την κωνική επιφάνεια.

Η φυσική σημασία των καμπυλών αυτών έγκειται στην ονομαζόμενη **γεωδαισιακή υπόθεση**. Σύμφωνα με αυτήν δεχόμαστε ότι τα σώματα που κινούνται ελεύθερα (δηλαδή μόνο με την επίδραση του πεδίου βαρύτητας, το οποίο είναι αποτέλεσμα της καμπύλωσης του χωροχρόνου από την ύλη) ακολουθούν χρονοειδείς γεωδαισιακές γραμμές, δηλαδή βρίσκονται μέσα στην κωνική επιφάνεια του κώνου φωτός, ενώ τα ελεύθερα φωτόνια ακολουθούν φωτοειδείς γεωδαισιακές γραμμές, δηλαδή κινούνται πάνω στην κωνική επιφάνεια. Γενικότερα οι χρονοειδείς καμπύλες παριστάνουν τροχιές υλικών σημείων και οι φωτοειδείς τροχιές φωτονίων και αυτό σημαίνει πως οποιοδήποτε υλικό σώματι ή φωτόνιο, που υπάρχει στο Σύμπαν, κινείται είτε μέσα είτε πάνω στην κωνική επιφάνεια.

Με όσα γνωρίζουμε σήμερα κανένα υλικό σώμα ή φωτόνιο δεν μπορεί να κινηθεί πάνω σε μία χωροειδή καμπύλη. Δηλαδή ο χώρος εκτός του κώνου φωτός δεν αποτελεί υπαρκτό σημείο ή γεγονός του χωροχρόνου (του Σύμπαντος). Συχνά τον χώρο αυτόν τον ονομάζουμε «**αλλού**» και δεν μπορούμε να τον περιγράψουμε ή να τον ορίσουμε.⁸

Κώνος φωτός και βαρύτητα

Αν, για πρακτικούς λόγους της παράστασης γραφικά του κώνου φωτός, περιορίσουμε σε δύο τις τρεις χωρικές διάστασεις, μπορούμε να τον παραστήσουμε σε τριδιάστατο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, του οποίου οι οριζόντιοι άξονες μετρούν τις δύο χωρικές και ο κατακόρυφος την χρονική συντεταγμένη. Το αποτέλεσμα είναι μία προβολή του κώνου φωτός στον χώρο των τριών αξόνων και αποτυπώνει σε μία σαφή εικόνα όλες τις ιδιότητες του. (βλέπε Εικόνα 2c)

Η γωνία φ που σχηματίζεται από μία γενέτειρα του κώνου και το οριζόντιο επίπεδο (βλ. Εικόνα 2b) είναι σημαντική διότι απ' αυτήν εξάγουμε συμπεράσματα για τον χωροχρόνο μέσα στον οποίο βρίσκεται το σημείο Σ (λαμβάνει χώρα το γεγονός Σ).

Συγκεκριμένα αν ένα γεγονός Σ (π.χ η μετάδοση ενός φωτεινού σήματος) λαμβάνει χώρα στον επίπεδο (απουσία βαρύτητας) χωροχρόνο *Minkowski*⁹, τότε η γωνία

⁸Η αδυναμία ορισμού του χώρου εκτός του κώνου φωτός, ο οποίος δημιουργείται από τις χωροειδείς γεωδαισιακές και τα εφαπτόμενα διανύσματά τους, μαθηματικά εκφράζεται από την αδυναμία ορισμού του αρνητικού μέτρου του εφαπτόμενου χωροειδούς διανύσματος.

⁹Πρόκειται για τον τετραδιάστατο χωροχρόνο, η μαθηματική θεωρία του οποίου παρουσιάστηκε από τον *Hermann Minkowski* στις 21 Σεπτεμβρίου 1908 στο 80^ο συνέδριο των Γερμανών φυσικών επιστημόνων και φυσικών. Είναι μία τετραδιάστατη τοπολογική πολλαπλότητα με τρεις χωρικές διαστάσεις και την διάσταση του χρόνου και αποτελεί την γεωμετρική διατύπωση της Ειδ. Θεωρίας της Σχετικότητας, η οποία μελετά την κίνηση των σωμάτων και φωτονίων απουσία βαρυτικού πεδίου.

$\varphi = 45^\circ$ (βλ. Εικόνα 2a).

Αυτό μπορεί κανείς εύκολα να το αντιληφθεί, αν σκεφτεί ότι, στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (ΕΘΣ) και απουσία βαρυτικού πεδίου κατά τη διάδοση (με ταχύτητα c) ενός φωτεινού σήματος στις δύο διαστάσεις, ισχύει:

$$x = y = ct$$

αυτό σημαίνει ότι:

$$\tan \varphi = \frac{ct}{x} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Εύκολα συμπεραίνεται ότι ένα γεγονός που ταξιδεύει με ταχύτητα μικρότερη της ταχύτητας του φωτός ($u < c$) θα βρίσκεται σε γεωμετρικό σημείο στο εσωτερικό της κωνικής επιφάνειας ($\varphi < 45^\circ$) διότι θα είναι¹⁰:

$$\tan \varphi = \frac{ut}{x} < \frac{ct}{x} = \tan 45^\circ \Rightarrow \varphi < 45^\circ$$

Τέλος τα γεωμετρικά σημεία έξω από τον κώνο ($\varphi > 45^\circ$) δεν αντιστοιχούν σε γεγονότα του πραγματικού Σύμπαντος, διότι η άφιξη κάποιου αντίστοιχου μηνύματος θα απαιτούσε ταχύτητα μεγαλύτερη από εκείνη του φωτός και τέτοια ταχύτητα δεν υπάρχει στο Σύμπαν, σύμφωνα με την ΕΘΣ.

Σημαντική επίσης είναι και η γωνία δ (βλ. Εικόνα 2c) η οποία δηλώνει το άνοιγμα (2δ) του κώνου φωτός. Από αυτό λαμβάνουμε πληροφορίες για την καμπύλωση του χωροχρόνου.

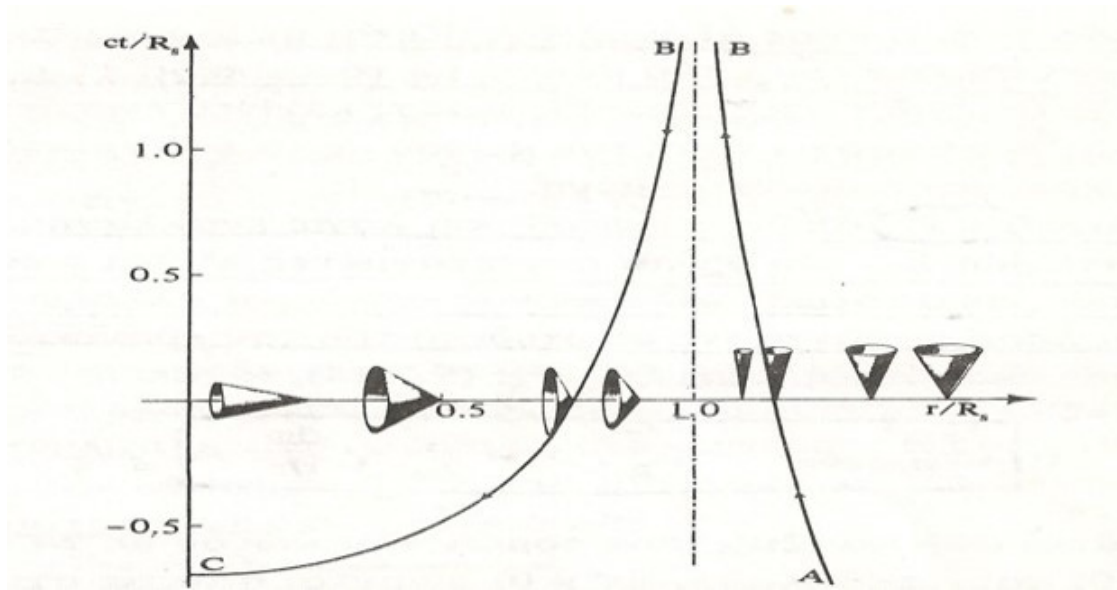
Στην περίπτωση του επίπεδου χωροχρόνου *Minkowski* (στον οποίο απουσιάζει το βαρυτικό πεδίο και η καμπυλότητα είναι μηδέν) η γωνία $\delta = 45^\circ$ και το άνοιγμα 2δ του κώνου φωτός είναι 90 μοίρες.¹¹

Στον καμπύλο χωροχρόνο η γωνία δ είναι μικρότερη από 45° και μάλιστα, όσο μεγαλύτερη είναι η καμπύλωση του χωροχρόνου τόσο μικραίνει η γωνία δ . Στην περίπτωση πολύ μεγάλης (άπειρης) καμπύλωσης η γωνία γίνεται $\delta = 0^\circ$ και ο κώνος φωτός εκφυλίζεται σε μία κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο Σ . Αυτό συμβαίνει στο εσωτερικό μιας μελανής οπής, της οποίας το βαρυτικό πεδίο είναι τεράστιο και η καμπύλωση του χωροχρόνου στο εσωτερικό της είναι θεωρητικά άπειρη. Την μεταβολή του ανοίγματος του κώνου φωτός καθώς πλησιάζουμε σε μία μελανή οπή μπορούμε να δούμε στο γράφημα της Εικόνας 3.

Εξετάζοντας στην Εικόνα 3 τη μεταβολή του κώνου φωτός κατά την ακτινική πτώση του σε μία μελανή οπή (πεδίο *Schwarzschild*), παρατηρούμε ότι η μεταβολή δεν συνίσταται μόνο στο άνοιγμα (2δ) του κώνου αλλά και στον προσανατολισμό του.

¹⁰Η συνάρτηση $\tan \varphi$ είναι αύξουσα στο διάστημα $(0^\circ, 90^\circ)$

¹¹Εύκολα προκύπτει αυτό από το γεγονός ότι οι γωνίες φ και δ είναι συμπληρωματικές ($\varphi + \delta = 90^\circ$) και, όπως παραπάνω αποδείξαμε, η γωνία φ του χωροχρόνου αυτού είναι 45° .

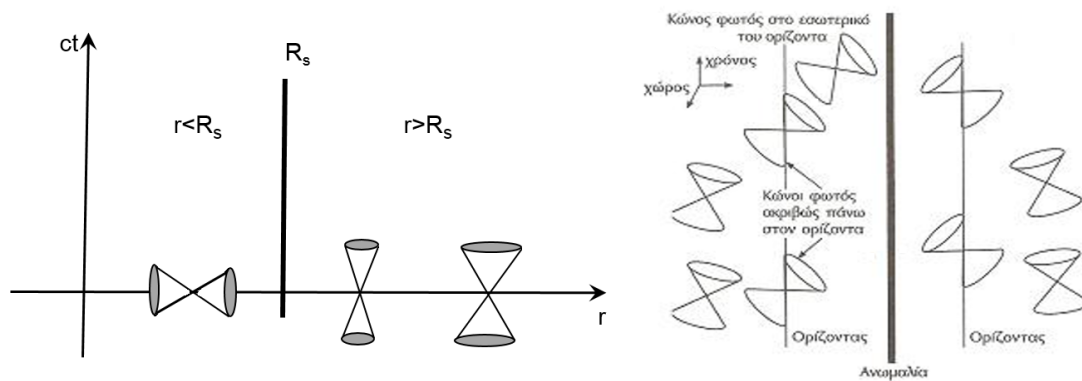


Εικόνα 3: Η μεταβολή του κώνου φωτός κατά την ακτινική πτώση του σε πεδίο Schwarzschild. Όταν βρισκόμαστε πολύ μακριά από τη μελανή οπή ($r \gg R_s$), όπου θεωρητικά δεν υπάρχει πεδίο βαρύτητας και ο χωροχρόνος είναι επίπεδος, το άνοιγμα του κώνου είναι το μέγιστο ($2\delta = 90^\circ$). Καθώς πλησιάζει προς τον ορίζοντα γεγονότων της μελανής οπής ο κώνος συνεχώς κλείνει. Στον ορίζοντα ($r = R_s$) το άνοιγμά του έχει ελαττωθεί πολύ και η μία γενέτειρά του εφάπτεται στον ορίζοντα. Περνώντας το όριο ($r = R_s$) συνεχίζει να ελαττώνει το άνοιγμα και εκφυλίζεται σε μία ευθεία (την γενέτειρά του), όταν φθάσει στην ανωμαλία $r = 0$. Πηγή Εικόνας: βιβλιογραφία [3]

Έξω από τον ορίζοντα $r = R_s$ ο κώνος φωτός περιλαμβάνει στο εσωτερικό του τη χρονοειδή συντεταγμένη ct και το άνοιγμά του ολοένα και μικραίνει, όσο πλησιάζει προς τον ορίζοντα. Μέσα στον ορίζοντα, δηλαδή στην περιοχή $r < R_s$, οι συντεταγμένες ct και x εναλλάσσουν τους ρόλους τους (η ct γίνεται πια χωροειδής και η x γίνεται χρονοειδής), με αποτέλεσμα να φαίνεται ότι ο κώνος φωτός άλλαξε τον προσανατολισμό του κατά 90° .

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι ακτινικές γεωδαισιακές καμπύλες παρουσιάζονται χρονοειδείς στην περιοχή $r > R_s$ και χωροειδείς στην περιοχή $r < R_s$. Επειδή όμως το εφαπτόμενο διάνυσμα εκτελεί παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος των γεωδαισιακών καμπυλών¹², αυτό (το διάνυσμα) δεν είναι δυνατό να αλλάξει χαρακτήρα (προσανατολισμό), παρά μόνο, αν μηδενιστεί.

¹²Ο πλήρως μαθηματικός ορισμός της γεωδαισιακής καμπύλης είναι: Μια καμπύλη, της οποίας το εφαπτόμενο διάνυσμα μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του, ονομάζεται γεωδαισιακή καμπύλη (βλ. σελ.31 του [3] της βιβλιογραφίας).



Εικόνα 4: Αριστερά: : Ο προσανατολισμός του κώνου φωτός αλλάζει κατεύθυνση κατά 90° , όταν η φωτεινή ακτίνα διέρχεται το όριο $r = R_s$. Δεξιά: Οι κώνοι φωτός στη γειτονιά μιας Μελανής Οπής. Πηγή Εικόνων: βιβλιογραφία [3]

Στην Εικόνα 4 δίνεται άλλη μία αναπαράσταση της μή ομαλής αλλαγής προσανατολισμού του κώνου φωτός κάτω από την επίδραση των ισχυρών παλιρροϊκών δυνάμεων κατά τη διέλευση του ορίζοντα γεγονότων καθώς και ο προσανατολισμός των κώνων στη γειτονιά μιας μελανής οπής.

Η παχιά μαύρη γραμμή αριστερά παριστά τη χωροχρονική ανωμαλία (κέντρο της μελανής οπής) στην οποία το βαρυτικό πεδίο είναι απείρως ισχυρό. Οι δύο λεπτές γραμμές οι οποίες παριστάνουν τον ορίζοντα των γεγονότων, αποτελούνται από ακτίνες φωτός που παραμένουν σε σταθερή απόσταση από την ανωμαλία. Οι κώνοι φωτός ακριβώς πάνω στον ορίζοντα έχουν σχεδιαστεί με κλίση, ώστε να αποδίδεται το γεγονός ότι η φωτεινή ακτίνα που τείνει να απομακρυνθεί από τη Μελανή Οπή παραμένει σε σταθερή απόσταση και ταξιδεύει κατά μήκος του ορίζοντα. Τέλος οι κώνοι φωτός στο εσωτερικό του ορίζοντα των γεγονότων έχουν τέτοια κλίση, ώστε κάθε κίνηση προς το μέλλον να οδηγεί πλησιέστερα στην ανωμαλία.

Και από την ανάλυση της Εικόνας 4 προκύπτει ότι η ένωση των περιοχών $r > R_s$ και $r < R_s$ δε γίνεται με ομαλό τρόπο στην επιφάνεια $r = R_s$, αντίθετα η καμπύλωση στην επιφάνεια $r = R_s$ είναι πολύ έντονη και οι παλιρροϊκές δυνάμεις, που την χαρακτηρίζουν, απείρως ισχυρές. (Μια μαθηματική ανάλυση του τρόπου με τον οποίο οι αντινικές γεωδαισιακές καμπύλες μετατρέπονται από χρονοειδείς σε χωροειδείς κατά τη διέλευση από τον ορίζοντα γεγονότων δίδεται στο Παράρτημα ΣΤ σελ.137-141 του [6] της βιβλιογραφίας.)

Ιωάννης Χρ. Αγαπάκης
Θεσσαλονίκη, 10 Φεβ 2023

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Minkowski H. (1909) « Space and Time» (Raum und Zeit)
- [2] Ηλιοπούλου Ε.Α., Ταμιά-Δημοπούλου Π (1985) «Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες», Εκδόσεις Ζήτης, Θεσσαλονίκη
- [3] Σπύρου Ν.Κ. (1989) «Εισαγωγή στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας», Εκδόσεις Γαρταγάνης, Θεσσαλονίκη
- [4] Hawking S.(1996) «Το Χρονικό του Χρόνου», Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα
- [5] Κόκκοτας Κ.Δ. (2006) «Γενική Θεωρία της Σχετικότητας», (Σημειώσεις για τους φοιτητές) Εκδόσεις ΑΠΘ, Θεσσαλονίκη
- [6] Αγαπάκης Ι.Χρ. (2019) «Μελανές Οπές», Εκδόσεις CopyCity Center., Θεσσαλονίκη