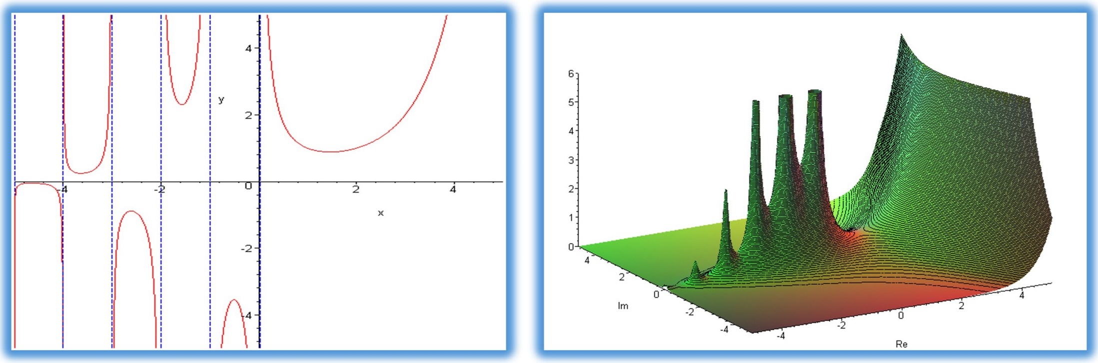
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΓΑΜΜΑ

Η Συνάρτηση Γάμμα είναι μία από τις απλούστερες αλλά και σημαντικότερες «Ειδικές Συναρτήσεις»[1] και η γνώση των ιδιοτήτων της είναι συχνά προαπαιτούμενο για την μελέτη πολλών άλλων ειδικών συναρτήσεων.

Η θεωρία για τη συνάρτηση Γάμμα αναπτύχθηκε στην προσπάθεια της γενίκευσης



Εικόνα 1: *(Αριστερά) Η γραφική παράσταση της Συναρτήσεως Γάμμα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Δεξιά) Η γραφική παράσταση στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, όπως δίδεται στο* $WolfgangAlpha$.

του παραγοντικού φυσικών αριθμών, δηλαδή στην προσπάθεια να βρεθεί μια έκφραση που να επεκτείνει το $n!$ σε οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό. Έτσι αποδείχθηκε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt,\ n \in N$$

ισούται με $n!$, δηλαδή

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt = n!,\ n \in N$$

Η συνάρτηση Γάμμα εισήχθη από τον Σουηδό Μαθηματικό Leonard Euler(1703-1783)[2] και ο ορισμός του επεκτάθηκε και στους μιγαδικούς αριθμούς ώστε τελικά να πάρει τη σημερινή του μορφή, όπως παρακάτω:

[1]Ειδικές Συναρτήσεις είναι ιδιαίτερες συναρτήσεις που εμφανίζονται σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών των Μαθηματικών της Φυσικής και της Χημείας, όπως στη Αριθμητική Ανάλυση, Θεωρία Πιθανοτήτων, Υπολογιστική Άλγεβρα, Θεωρία Συνεχών Κλασμάτων, Κβαντομηχανική, Θεωρία Ηλεκτρομαγνητισμού, Διάδοση μή Γραμμικών Κυμάτων, Θεωρία Διαθλάσεως, Θεωρητική Χημεία και άλλων. Οι περισσότερο γνωστές Ειδικές Συναρτήσεις είναι: η Συναρτήσεις Βήτα και Γάμμα, οι Κυλινδρικές Συναρτήσεις, τα Ορθογώνια Πολυώνυμα, η Υπεργεωμετρική Συνάρτηση, το Ολοκλήρωμα Πιθανότητας, η Συνάρτηση Σφάλματος και άλλες.

[2]Ο συμβολισμός $\Gamma(z)$ οφείλεται στον *Legendre* το έτος 1803

Ορισμός: Η συνάρτηση γάμμα (ή απλώς συνάρτηση $\Gamma(z)$) είναι η συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους μιγαδικούς αριθμούς με θετικό πραγματικό μέρος,

$$H(0) = z : z \in C, Re(z) > 0$$

και τύπο:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

η οποία συγκίνει για κάθε μιγαδικό αριθμό με θετικό πραγματικό μέρος.

Ιδιότητες

(α) $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z), z \in C \mu\epsilon \;\; Re(z) > 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τον ορισμό και για $z = z + 1$ παίρνουμε:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z} dt$$

Το ολοκλήρωμα αυτό θα το υπολογίσουμε με τη μέθοδο ολοκληρώσεως κατά παράγοντες, υπολογίζοντας πρώτα το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα.
Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή για δύο συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ είναι:

$$\int f(t) g'(t) dt = f(t) g(t) - \int f'(t) g(t) dt$$

θέτοντας τώρα $f(t) = e^{-t}$ και $g(t) = t^z$ θα είναι:

$$\int e^{-t} (t^z)' dt = e^{-t} t^z - \int (e^{-t})' t^z dt$$

ισοδύναμα:

$$\int e^{-t} \cdot z t^{z-1} dt = e^{-t} t^z - \int -e^{-t} t^z dt$$

βγάζοντας τη σταθερά z εκτός του πρώτου ολοκληρώματος και απλοποιώντας τα πρόσημα στο δεύτερο ολοκλήρωμα παίρνουμε:

$$z \int e^{-t} t^{z-1} dt = e^{-t} t^z + \int e^{-t} t^z dt$$

λύνοντας ως προς το ολοκλήρωμα του δεξιού μέρους, το οποίο είναι και το ζητούμενο, παίρνουμε:

$$\int e^{-t} t^z dt = e^{-t} t^z + z \int e^{-t} t^z dt \qquad (A)$$

Για το ορισμένο ολοκλήρωμα ισχύει:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-t}t^z dt \qquad (B)$$

Και παίρνοντας όρια στην σχέση (Α) έχουμε:

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-t}t^z dt = \lim_{a\to+\infty}[e^{-t}t^z + z\int_0^a e^{-t}t^z dt]$$

και

$$\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-t}t^z dt = \lim_{a\to+\infty}[e^{-t}t^z] + z\cdot\lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-t}t^z dt \qquad (\Gamma)$$

Τέλος λόγω της σχέσεως (Β), [η οποία ισχύει για όλα τα ολοκληρώματα με άνω όρισμα το $+\infty$], και επειδή $\lim_{a\to+\infty}[e^{-t}t^z] = [e^{-t}t^z]_{t=0}^a = 0$ η σχέση (Γ) γίνεται:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt = 0 + z\cdot\int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt$$

που λόγω του ορισμού της Συναρτήσεως Γάμμα τελικά παίρνει τη μορφή:

$$\Gamma(z+1) = z\cdot\Gamma(z)$$

(β) $\Gamma(1) = 1$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Από τον ορισμό είναι:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{1-1}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$$

όμως επειδή γνωρίζουμε ότι:[3]

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$$

τελικά θα είναι:

$$\Gamma(1) = 1$$

[3]Πράγματι είναι:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-t}dt = \lim_{a\to+\infty}\big[-e^{-t}\big]_{t=0}^a \overset{a\to+\infty}{=} -e^{-a} - (-e^{-0}) \overset{a\to+\infty}{=} 0+1 = 1$$

(γ) $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Πράγματι εφαρμόζοντας την ιδιότητα (α) για $z = 1$ παίρνουμε:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = \Gamma(1) = 1$$

(δ) Αν $z = n \in N$ τότε $\Gamma(n+1) = n!$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Αν $z = n \in N$ τότε ο ορισμός της Συναρτήσεως Γάμμα μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση της συναρτήσεως «Παραγοντικό Φυσικών Αριθμών» σε οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z με $Rez > 0$.
Πράγματι αν για $z = n \in N$ εφαρμόσουμε διαδοχικά την ιδιότητα (α) παίρνουμε:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot \underbrace{[(n-1)\Gamma(n-1)]}_{\Gamma(n)} = n(n-1) \cdot \underbrace{[(n-2)\Gamma(n-2)]}_{\Gamma(n-1)} =$$

$$= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \ldots = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) =$$

$$\overset{\Gamma(1)=1}{=} n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= n!$$

(ε) $\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin z\pi}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Ένας εναλλακτικός ορισμός της συναρτήσεως γάμμα, που οφείλεται κι αυτός στον *Euler* και ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό $z \neq 0$, είναι ο παρακάτω:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^z}{1+\frac{z}{n}} \qquad (A)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (α): $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ και εφαρμόζοντάς την για $z = -z$ παίρνουμε:

$$\Gamma(-z+1) = -z \cdot \Gamma(-z)$$

και ισοδύναμα:

$$\Gamma(1-z) = -z \cdot \Gamma(-z) \qquad (B)$$

Εφαρμόζουμε τον ορισμό (A) για $z = -z$ και παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\Gamma(-z) = \frac{1}{-z} \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{-z}}{1+\frac{-z}{n}}$$

πολλαπλασιάζουμε με $(-z)$ [για να συνθέσουμε το δεξιό μέρος της (B)] και παίρνουμε:

$$(-z)\cdot\Gamma(-z)=(-z)\cdot\frac{1}{-z}\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{-z}}{1-\frac{z}{n}}$$

και ισοδύναμα:

$$-z\cdot\Gamma(-z)=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{-z}}{1-\frac{z}{n}}\qquad(\Gamma)$$

Το δεξιό μέρος της (B) και το αριστερό της (Γ) είναι ίσα, άρα:

$$\Gamma(1-z)=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{-z}}{1-\frac{z}{n}}\qquad(\Delta)$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα κατά μέλη τις (A) και (Δ) και παίρνουμε τη σχέση:

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\frac{1}{z}\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{z}}{1+\frac{z}{n}}\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{-z}}{1-\frac{z}{n}}$$

η οποία μετά τις απλοποιήσεις[4] γίνεται:

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\frac{1}{z}\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-\frac{z^2}{n^2}}\qquad(E)$$

Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\sin z=z\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

και εφαρμόζοντας την τελευταία αυτή σχέση για $z=\pi z$ παίρνουμε:

$$\sin\pi z=\pi z\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\pi^2z^2}{n^2\pi^2}\right)$$

και απαλείφοντας το π^2, ισοδύναμα:

$$\sin\pi z=\pi z\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

[4]Στον παρονομαστή χρησιμοποιήσαμε την γνωστή ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων $(1+x)\cdot(1-x)=1-x^2$ ώστε: $(1+\frac{z}{n})\cdot(1-\frac{z}{n})=1-\frac{z^2}{n^2}$

τέλος διαιρώντας αριστερό και δεξιό μέρος με τον όρο πz θα είναι:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$

και τελικά αντιστρέφοντας:

$$\frac{\pi z}{\sin \pi z} = \prod_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2}}) \qquad (\Sigma T)$$

Στην σχέση (E) αντικαθιστούμε το πολλαπλάσιο με το ίσο του από την (ΣΤ):

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{\pi z}{\sin \pi z}$$

και μετά την απλοποίηση του z παίρνουμε την αποδεικτέα:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (α) για $z = n$ με $n \in N$ και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν τις ιδιότητες (β) και (γ) καταλήγουμε στην παραδοχή ότι η συνάρτηση Γάμμα αποτελεί τη γενίκευση της έννοιας του παραγοντικού στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

-Πράγματι για $n \in N$ η ιδιότητα (1) δίνει τη σχέση:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n), n \in N \qquad (1)$$

Ισοδύναμα εφαρμόζοντας την ιδιότητα αυτήν διαδοχικά παίρνουμε:

$$\Gamma(n) = (n-1) \cdot \Gamma(n-1)$$

$$\Gamma(n-1) = (n-2) \cdot \Gamma(n-2)$$

$$\Gamma(n-2) = (n-3) \cdot \Gamma(n-3)$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1)$$ [5]

[5] Πράγματι είναι $\Gamma(n-[n-2]) = (n-[n-1]) \cdot \Gamma(n-[n-1])$ δηλαδή ισοδύναμα $\Gamma(n-n+2) = (n-n+1) \cdot \Gamma(n-n+1)$ και $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) μία προς μία τις παραπάνω ισότητες καταλήγουμε τελικά στη σχέση:

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\Gamma(3)\cdot\Gamma(2)\cdot\Gamma(1)$$

ισοδύναμα[6]

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2\cdot 1\cdot 1$$

δηλαδή:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Αυτό σημαίνει ότι ο περιορισμός της συναρτήσεως Γάμμα στο σύνολο των Φυσικών αριθμών ουσιαστικά εκφράζει το παραγοντικό ενός φυσικού αριθμού.
Συνεπώς η γενίκευσή της στο σύνολο των Μιγαδικών αριθμών αντιστοιχεί στη γενίκευση της έννοιας του παραγοντικού στο Μιγαδικό σύνολο.

Ιωάννης Χρ. Αγαπάκης
Θεσσαλονίκη, 10 Ιουλ 2024

[6]Θα πρέπει να σημειωθεί ότι: $\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\cdot\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Lebedev N.N. (1972) «Special functions and their Applications» Dover Publications, Inc. N.Y.

[2] Μασσαλάς Χ. (2010) «Ειδικές Συναρτήσεις», Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα

[3] Σιαφαρίκας Π. (2009) «Ειδικές Συναρτήσεις», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών

[4] Hochstadt H.(1986) «The function of Mathematical Physics», Dover Publications, Inc. N.Y..

[5] Luke Y. L. (1969) «The special functions and their Approximations» Volume I, Acadenic Press