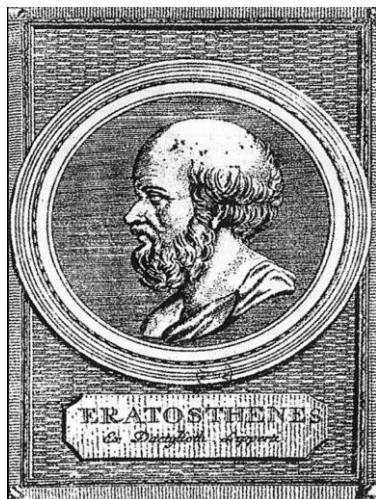


ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗ: Υπολογισμός της περιφέρειας της Γης

Ο Ερατοσθένης (Κυρήνη 276 π.Χ. – Αλεξάνδρεια 194 π.Χ.) ήταν αρχαίος Έλληνας μαθηματικός, γεωγράφος, αστρονόμος, γεωδαίτης, ιστορικός και φιλόλογος. Θεωρείται ο πρώτος που υπολόγισε το μέγεθος της Γης.



Γεννήθηκε στην Κυρήνη (στη σημερινή Λιβύη), έζησε, εργάστηκε και πέθανε στην Αλεξάνδρεια, πρωτεύουσα της πολεμιαϊκής Αιγύπτου.

Σπούδασε στην Αλεξάνδρεια και ισχυριζόταν ότι επίσης σπούδασε για κάποια χρόνια στην Αθήνα.

Το 236 π.Χ. ορίστηκε από τον Πτολεμαίο τον Γ' τον Ευεργέτη βιβλιοθηκάριος της Βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, διαδεχόμενος τον Ζηνόδοτο.

Από το 234 π.Χ. και επί περίπου 40 χρόνια διετέλεσε υπεύθυνος της περίφημης βιβλιοθήκης και δίδαξε στο Μουσείο της. Δεν νυμφεύθηκε ποτέ. Το 194 π.Χ. τυφλώθηκε και ένα χρόνο αργότερα σταμάτησε να τρώει και πέθανε. Δεν μπόρεσε να αντέξει τη στέρηση της ανθρώπινης γνώσης που του επέβαλε η τύφλωση.

Πηγή: Wikipedia [3]

Ο Κλεομήδης¹ στο έργο του «Περί της κυκλικής του κινήσεως των ουρανίων σωμάτων» [1] αναφέρει ότι γύρω στο 240 π.Χ. ο Ερατοσθένης υπολόγισε την περιφέρεια της Γης χρησιμοποιώντας το ύψος του Ηλίου κατά το θερινό ηλιοστάσιο σε δύο διαφορετικά γεωγραφικά σημεία, το ένα κοντά στην Αλεξάνδρεια (νήσος Ελεφαντίνη) και το άλλο κοντά στη Συήνη (σημερινό Ασσουάν, Αίγυπτος), που όμως βρίσκονταν στον ίδιο (περίπου) μεσημβρινό.

Η αντίληψη της εποχής-Το επιστημονικό υπόβαθρο.

Πριν όμως προχωρήσουμε στην ανάλυση της μεθόδου που ακολούθησε ο Ερατοσθένης ας δούμε το επιστημονικό υπόβαθρο που επικρατούσε την εποχή εκείνη.

Ήδη από τον 6^ο αι. π.Χ. οι Πυθαγόρειοι αστρονόμοι, μαθηματικοί και φιλόσοφοι δέχονταν τη σφαιρικότητα της Γης. Συγκεκριμένα οι Έκφαντος, Ικέτας και Ηρακλείδης ο Ποντικός, ήδη την θέτουν να περιστρέφεται σε 24 ώρες γύρω από τον άξονά της, αποδίδουν δε τη φαινόμενη κίνηση της ουράνιας σφαίρας, από την Ανατολή στη Δύση, στην περιστροφή αυτή. Πρώτος ο Φιλόλαος ο Πυθαγόρειος θεωρεί την Γη ουράνιο σώμα και μάλιστα όχι ακίνητο, αλλά περιφερόμενο γύρω από το «Κεντρικό Πυρ» τον Ήλιο.

Τον 4ο αι. π.Χ. ο Αριστοτέλης, στο έργο του «περί Ουρανού» [2] τεκμηριώνει τη σφαιρικότητα της Γης και αναφέρεται στον υπολογισμό της περιφέρειάς της από προγενέστερους μαθηματικούς.

Τον 3ο αι. π.Χ. ο Αρίσταρχος ο Σάμιος θέτει τη Γη, όπως και τους υπόλοιπους πλανήτες, να περιστρέφονται γύρω από τον Ήλιο.

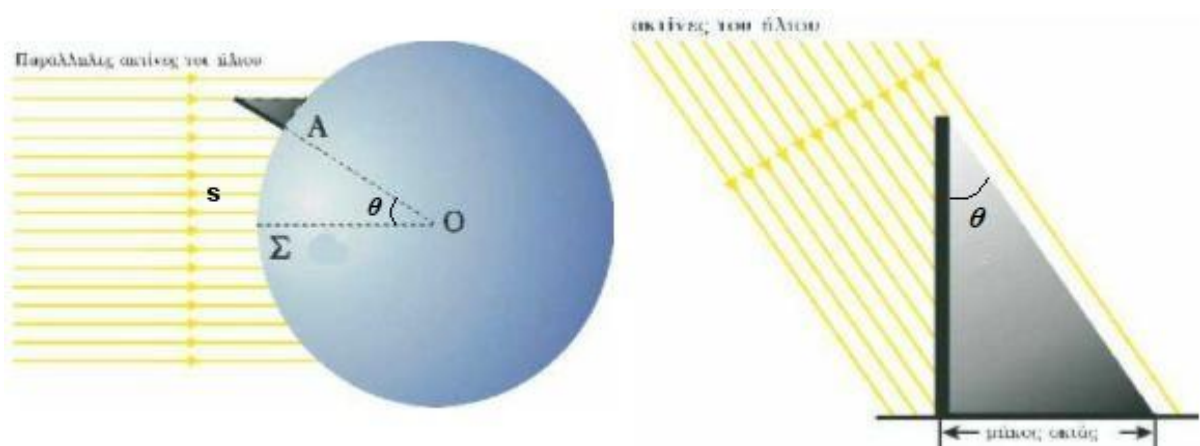
Αντίθετα λοιπόν, με ότι πιστεύει ο μέσος πολίτης σήμερα, οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν πριν την εποχή του Αριστοτέλη ότι η Γη είναι σφαιρική και όχι επίπεδη.

¹ Ο Κλεομήδης, ο επονομαζόμενος «Κοσμογράφος», ήταν αρχαίος Έλληνας αστρονόμος που έζησε είτε κατά τον 1ο αιώνα μ.Χ., είτε στο τέλος του 2ου και στις αρχές του 3ου αιώνα μ.Χ. είναι γνωστός από την εκλαϊκευτική πραγματεία του «Κυκλική θεωρία μετεώρων», όπου περιγράφει τη μέτρηση της περιμέτρου της Γης από τον Ερατοσθένη και παρόμοια εργασία του Ποσειδωνίου. Επίσης, ο Κλεομήδης αναφέρει ότι η Γη θα πρέπει να φαίνεται ως ένα φωτεινό σημείο από την απόσταση του Ηλίου, και επίσης εξηγεί σωστά την ατμοσφαιρική διάθλαση του φωτός.

Το πείραμα και η μέθοδος υπολογισμού

Σ' αυτό το ήδη εξαιρετικά πρωτοποριακό για την εποχή επιστημονικό πλαίσιο ο Ερατοσθένης είχε επίσης την τύχη, ως Διευθυντής της Βιβλιοθήκης της Αλεξανδρείας², να βρίσκεται σε ένα περιβάλλον που ευνοούσε, όσο κανένα άλλο, την έρευνα την εποχή εκείνη.

Εκεί στη μεγάλη βιβλιοθήκη, κάποια μέρα στα 240 π.Χ., διάβασε σε έναν πάπυρο κάτι που του τράβηξε την προσοχή. Την ημέρα του θερινού ηλιοστασίου³ (21 Ιουνίου), ακριβώς το μεσημέρι, ο Ήλιος καθρεπτιζόταν ολόκληρος (έριχνε τις ακτίνες του κάθετα) σε κάποιο πηγάδι, στην πόλη Συήνη στην Άνω (νότια) Αίγυπτο, ενώ παρατήρησε ότι την ίδια ημερομηνία στην Αλεξάνδρεια δε συνέβαινε το ίδιο. Συγκεκριμένα στην Αλεξάνδρεια (στη νήσο Ελεφαντίνη), μία κατακόρυφη ράβδος, (ένας οβελίσκος) που ο ίδιος γι' αυτό το σκοπό, είχε τοποθετήσει, έριχνε σκιά την ίδια ώρα που, όπως είχε διαβάσει, στη Συήνη οι ακτίνες του Ηλίου έπεφταν κατακόρυφα στο πηγάδι, αντανακλώντας την εικόνα του ηλιακού δίσκου. Ο Ερατοσθένης είχε την πεποίθηση ότι ο Ήλιος απείχε πολύ μακριά από τη Γη, τόσο ώστε οι ακτίνες του έφθαναν παράλληλες σε κάθε σημείο της επιφάνειάς της. Έτσι στο μυαλό του συνέλαβε το σχήμα της Εικόνας 1.



Εικόνα 1: Οι ακτίνες του Ήλιου συναντούν κατακόρυφα το σημείο Σ (Συήνη), την ίδια στιγμή που αποκόπτουν γωνία θ από την ράβδο (οβελίσκο) στο σημείο Α (Αλεξάνδρεια).

Γνωρίζοντας το μήκος της ράβδου, μετρώντας τη σκιά που έκοβε ο Ήλιος εκείνη τη στιγμή και εφαρμόζοντας τον ορισμό της εφαπτομένης μιας γωνίας⁴ για το τρίγωνο της Εικόνας 1 (Δεξιά), υπολόγισε την γωνία θ , η οποία προέκυψε μετά τη μέτρηση, $\theta=7,2^\circ$.

Ο αμέσως επόμενος συλλογισμός του, έχοντας στο μυαλό του το σχήμα της Εικόνας 1 (Αριστερά) και γνωρίζοντας ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες τον οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η γωνία υπό την οποία «φαίνεται» το τόξο ΣΑ θα είναι κι αυτή ίση με $\theta=7,2^\circ$.

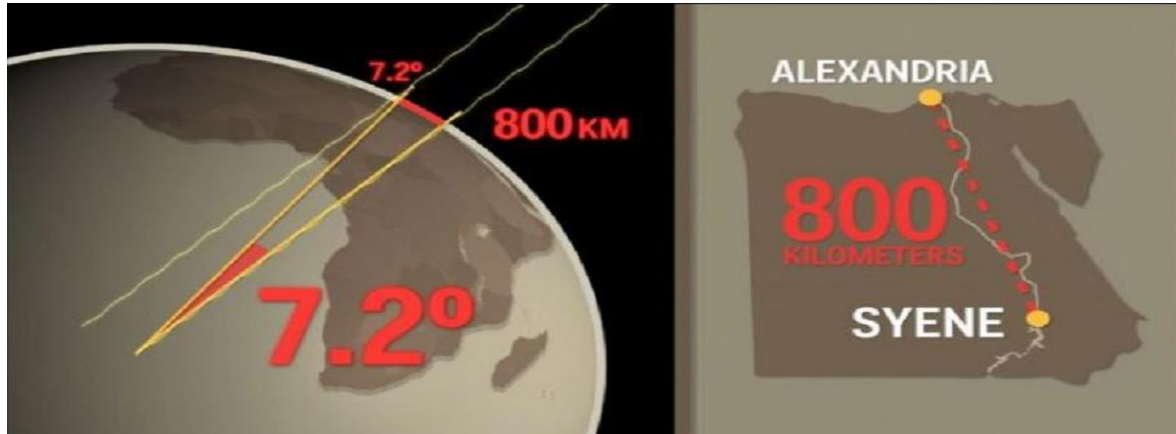
Αυτό που του έλειπε ήταν η απόσταση μεταξύ των δύο πόλεων...

² Η περίφημη βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας, ως το σημαντικότερο εκδοτικό κέντρο του τότε γνωστού κόσμου, φημιζόταν για τον πλούτο των χειρογράφων της, συγκριτικά με κάθε άλλη γνωστή βιβλιοθήκη, προσελκύνοντας πλήθος σοφών και ερευνητών της εποχής.

³ Κατά το θερινό ηλιοστάσιο, από τους τόπους που βρίσκονται σε βόρειο γεωγραφικό πλάτος $23^\circ 26'$, δηλαδή στον τροπικό του Καρκίνου, βλέπουμε τον ήλιο να περνά ακριβώς από το ζενίθ του το μεσημέρι. Η Συήνη βρίσκεται σχεδόν πάνω στον τροπικό του Καρκίνου, απέχοντας μόλις 20 km από αυτόν.

⁴ Ήταν ήδη γνωστός ο ορισμός της εφαπτομένης μιας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ως: ο λόγος της απέναντι προς την προσκείμενη πλευρά του.

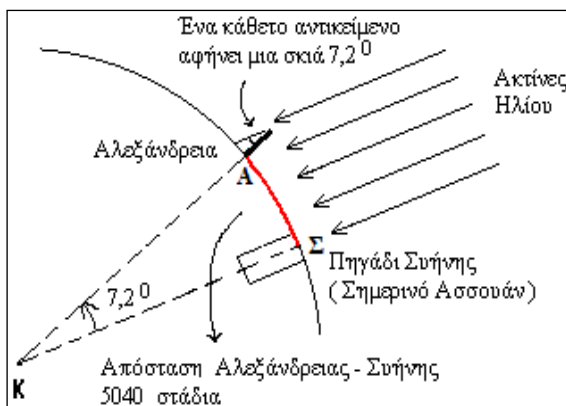
Σύμφωνα με την παράδοση, ο Ερατοσθένης ανέθεσε σε επαγγελματίες βαδιστές να την υπολογίσουν, και το αποτέλεσμα τους το συνέκρινε με τις εκτιμήσεις αρχηγών караβανιών.⁵ Τελικά κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η απόσταση Αλεξάνδρειας- Συήνης ισούται με 5.040 στάδια (περίπου 800 km).



Εικόνα 2: (Αριστερά) Η γωνιακή απόσταση των 7,2° μεταξύ των δύο πόλεων η οποία στην επιφάνεια αντιστοιχεί σε απόσταση 800km ή 5040 σταδίων.
(Δεξιά) Η χιλιομετρική απόσταση των δύο πόλεων Συήνης και Αλεξάνδρειας.
Πηγή: <https://www.ancientgrecereloaded.com/>

Τώρα είχε όλα όσα χρειαζόνταν για να υπολογίσει την περιφέρεια της Γης. Με μια απλή αναλογία γωνιών και αντίστοιχων επίκεντρων γωνιών μπορούσε να έχει αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα ο λόγος της γωνίας θ προς την απόσταση ΣΑ (Συήνης – Αλεξάνδρειας) της Εικόνας 1 είναι ίσος με τον λόγο της γωνίας 360° προς την περιφέρεια της Γης, με μοναδικό άγνωστο την περιφέρεια της Γης σ' αυτή την αναλογία. Με πολύ απλές πράξεις η περιφέρεια της Γης προέκυψε ίση με 252.000 στάδια και η ακτίνα 40.100 στάδια.

Τα Μαθηματικά που χρησιμοποίησε ο Ερατοσθένης



Εικόνα 3: Το Μαθηματικό σχήμα του πειράματος

Πιο πάνω αναφερθήκαμε στον υπολογισμό της γωνίας προσπτώσεως θ που υπολόγισε ο Ερατοσθένης από της εφαπτομένη της. Η σχέση που δίνει τη εφαπτομένη της θ στο τρίγωνο της Εικόνας 1 είναι:

$$\epsilon\phi\theta = \frac{\alpha\pi\epsilon\nu\alpha\nu\tau\iota}{\pi\rho\omicron\sigma\kappa\epsilon\iota\mu\epsilon\nu\eta} = 0,126329 \Rightarrow \theta = 7,2^\circ$$

όπου η απέναντι της θ πλευρά είναι η σκιά της ράβδου, ενώ η προσκείμενη στη θ πλευρά είναι η ράβδος.⁶

Ο Ερατοσθένης χρησιμοποίησε επίσης την ισότητα των εντός εναλλάξ γωνιών που τέμνουσα ευθεία «κόβει» από δύο άλλες παράλληλες. Έτσι από το γεγονός ότι η γωνία προσπτώσεως των ακτίνων του Ηλίου στη ράβδο είναι ίση προς την

⁵ Κάποιοι μελετητές ισχυρίζονται ότι την υπολόγισε με βάση τη σταθερή ταχύτητα με την οποία ταξίδευαν τα караβάνια -100 στάδια την ημέρα- επί 50 ημέρες, δηλαδή 5.000 στάδια συνολικά ή 820 km

⁶ Η σκιά της ράβδου εκείνη τη μέρα προς το μήκος της ράβδου που χρησιμοποιήθηκε έδινε λόγο 0,126329 που αντιστοιχεί σε γωνία 7,2°.

επίκεντρη γωνία $\Sigma\text{ΚΑ}$ του τόξου $\Sigma\text{Α}$ (Εικόνες 1 και 2 Αριστερά), υπολόγισε την επίκεντρη γωνία που αντιστοιχεί στο τόξο $\Sigma\text{Α}$ που ενώνει τις δύο πόλεις. Έτσι:

$$\Sigma\text{ΚΑ} = \Sigma\text{Α} = \theta = 7,2^\circ$$

βλέπε Εικόνα 3.

Τέλος για τη σύνδεση αποστάσεων και γωνιών ο Ερατοσθένης χρησιμοποίησε την αναλογία:

$$\frac{\theta}{\Sigma\text{Α}} = \frac{360^\circ}{2\pi R} \quad (1)$$

όπου: $\theta = 7,2^\circ$, $\Sigma\text{Α}$: η απόσταση Συήνη-Αλεξάνδρεια και $2\pi R$: η περιφέρεια της Γης. Από την τελευταία σχέση μοναδικός άγνωστος είναι η ακτίνα R , οπότε υπολογίζεται λύνοντας ως προς R .

Οι υποθέσεις στις οποίες βασίστηκε ο Ερατοσθένης

Ο Ερατοσθένης για να καταλήξει στον υπολογισμό του βασίστηκε σε κάποιες υποθέσεις που δεν ήταν προφανείς στην εποχή του. Παρακάτω βλέπουμε τις υποθέσεις αυτές και το αν και πόσο επηρέασαν την ορθότητα του αποτελέσματος στο οποίο κατέληξε.

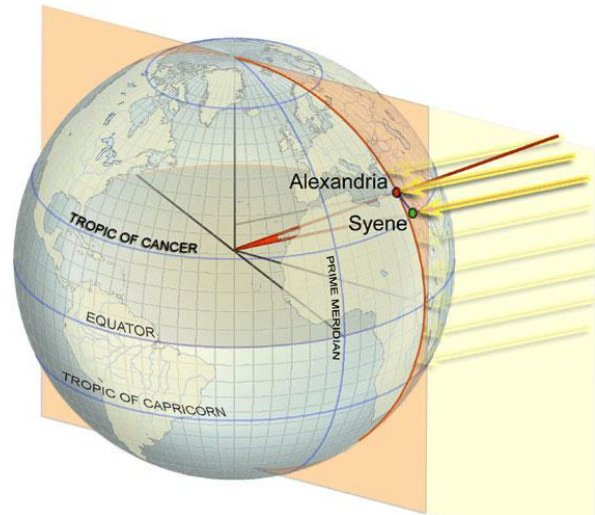
Υπόθεση 1η: Η Γη είναι σφαίρα και φωτίζεται ομοιόμορφα από τον ήλιο, ο δε ήλιος βρίσκεται τόσο μακριά από τη Γη, ώστε οι ακτίνες του φτάνουν σε αυτήν ουσιαστικά παράλληλες.

Η υπόθεση αυτή είναι ορθή, όπως γνωρίζουμε σήμερα.

Υπόθεση 2η: Θεώρησε ότι οι δύο πόλεις βρίσκονται πάνω στον ίδιο μεσημβρινό.

Για να είναι ακριβές θα έπρεπε να πραγματοποιήσει το πείραμά του την ίδια χρονική στιγμή, δηλαδή να δει την σκιά του Ηλίου ταυτόχρονα σε Αλεξάνδρεια και Συήνη. Γνώριζε όμως ότι όσο τόποι βρίσκονται πάνω στον ίδιο μεσημβρινό, ο Ήλιος μεσουρανεί σ' αυτούς την ίδια χρονική στιγμή. Διεξήγαγε λοιπόν το πείραμά του⁷ το μεσημέρι της 21 Ιουνίου στην Αλεξάνδρεια, γνωρίζοντας ότι και στη Συήνη εκείνη τη στιγμή ο Ήλιος θα μεσουρανούσε.

Ούτε η υπόθεσή του αυτή μπορεί να θεωρηθεί λάθος, αφού η Αλεξάνδρεια και η Συήνη βρίσκονται σχεδόν στον ίδιο μεσημβρινό απέχοντας κατά γεωγραφικό μήκος μόλις 3° , με βάση σημερινούς υπολογισμούς (βλέπε Εικόνα 4).



Εικόνα 4: Η Αλεξάνδρεια και η Συήνη βρίσκονται σχεδόν πάνω στον ίδιο Μεσημβρινό. Η Συήνη είναι πολύ κοντά στον τροπικό του Καρκίνου.

⁷ Κατά τη μεσημβρία του θερινού ηλιοστασίου στη Συήνη, ο ήλιος κατοπτρίζονταν ολόκληρος στον πυθμένα του πηγαδιού, αυτό σήμαινε ότι εκείνη τη στιγμή ο ήλιος βρισκόταν στην κατακόρυφο του τόπου (στο Ζενίθ του). Την ίδια χρονική στιγμή, τοποθετώντας στο έδαφος της Αλεξάνδρειας μια κατακόρυφη ράβδο, υπολόγισε τη γωνία πρόσπτωσης των ηλιακών ακτίνων με το κατακόρυφο επίπεδο: μέσω της εφαπτομένης της, γνωρίζοντας το μήκος της ράβδου και μετρώντας το μήκος της σκιάς της. Η γωνία όπως γνωρίζουμε υπολογίστηκε σε περίπου $7,2^\circ$.

Υπόθεση 3η: Θεώρησε ότι η Συήνη βρίσκεται στον τροπικό του Καρκίνου. Κατά το θερινό ηλιοστάσιο, από τους τόπους που βρίσκονται σε βόρειο γεωγραφικό πλάτος $23^{\circ} 26'$, δηλαδή στον τροπικό του Καρκίνου, βλέπουμε τον ήλιο να περνά ακριβώς από το ζενίθ του το μεσημέρι. Και εδώ το σφάλμα του ήταν ελάχιστο, αφού η Συήνη βρίσκεται σχεδόν πάνω στον τροπικό του Καρκίνου, σε πλάτος $24^{\circ} 06'$ και απέχοντας μόλις 20 km από αυτόν (βλέπε Εικόνα 4).

Υπολογισμοί αποστάσεων σε στάδια

Ο Ερατοσθένης μέτρησε την απόσταση Αλεξάνδρειας-Συήνης σε στάδια.⁸ Το πρόβλημα τώρα για μας είναι ότι το στάδιο διέφερε από τόπο σε τόπο. Έτσι, μη γνωρίζοντας ποιον τύπο σταδίου χρησιμοποίησε, δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για την ακρίβεια του υπολογισμού της περιφέρειας (και της ακτίνας) της Γης σε σχέση με τις σημερινές των τιμές.

Γνωρίζουμε ότι οι βηματιστές που μέτρησαν την απόσταση Αλεξάνδρειας-Συήνης την βρήκαν 5040 στάδια και με αυτό ως δεδομένο ο Ερατοσθένης υπολόγισε την περιφέρεια της Γης στα 252.000 στάδια.⁹

Αν υποθέσουμε ότι ο Ερατοσθένης εννοούσε αττικά στάδια των 185 μέτρων, τότε το αποτέλεσμά του δίνει για την περιφέρεια της Γης τιμή 46.600 km (έναντι 40.007,86 km που υπολογίζεται σήμερα) και για την ακτίνα 7.420 km, τιμή 16% μεγαλύτερη από την πραγματική (6.371 km).

Αν όμως υποθέσουμε ότι εννοούσε αλεξανδρινά στάδια (που είναι και το πιο πιθανόν), τα οποία ισοδυναμούν με 157,50 μέτρα, τότε ο υπολογισμός δίνει για την περιφέρεια τιμή 39.690 km ($252.000 \times 157,5 \text{m} = 39.690.000 \text{m}$) και αντίστοιχα για την ακτίνα της Γης την εκπληκτική για την εποχή εκείνη προσέγγιση των 6.316 km, μόλις 1% μικρότερη από την πραγματική (6.371 km).

Επίλογος

Το πείραμα του Ερατοσθένη, με το οποίο ο αρχαίος φιλόσοφος υπολόγισε την ακτίνα και την περιφέρεια της Γης ήταν εκπληκτικό, όχι μόνο για τη σύλληψή του, αλλά και για την καταπληκτική του ακρίβεια. Παρ' ότι οι υποθέσεις του είχαν αποκλίσεις από την πραγματικότητα, και παρά τον μη αξιόπιστο τρόπο μετρήσεως μεγάλων αποστάσεων της εποχής, η προσέγγιση του υπολογισμού ήταν φανταστική. Αυτό αποδεικνύει το μεγαλείο της σκέψης του Έλληνα φιλοσόφου, που με μοναδικά εργαλεία ράβδους, μάτια, πόδια και μυαλό, αλλά με μεγάλη όρεξη για πειραματισμό πέτυχε κάτι τόσο σπουδαίο.



Ιωάννης Χρ. Αγαπάκης
Αίγυπτος 19-25 Φεβρουαρίου 2023

⁸ Το στάδιο ήταν η συνηθέστερη την εποχή εκείνη μονάδα μέτρησης μεγάλων μηκών.

⁹ Αυτό είναι το αποτέλεσμα που εξάγουμε αν λύσουμε τη σχέση (1) ως προς τον όρο $2\pi R$ αντικαθιστώντας όπου

$$\Sigma A = 5040 \text{ στάδια. Πράγματι: } 2\pi R = \frac{360^{\circ}}{\theta} \Sigma A = \frac{360^{\circ}}{7,2^{\circ}} \cdot 5040 = 252.000 \text{ στάδια.}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Κλεομήδου (1ος αι. μ.Χ.): «Περί της κυκλικής κινήσεως των ουρανίων σωμάτων»
- [2] Ερατοσθένους (3ος αι. π.Χ.): «Γεωγραφικά»
- [3] Στάβωνος (1ος αι. μ.Χ.) «Γεωγραφικών Α: Εισαγωγή – Κριτική στον Ερατοσθένη» Εκδόσεις Οδυσσέας Χατζόπουλος
- [4] Casaubon Isaac (1620) «Strabonis *Rerum Geographicarum Libri XVII*» Εκδόσεις Lutetiae Parisiorum: Typis regiis
- [5] Βάρβογλη Χ. «Ο Ερατοσθένης και η ακτίνα της Γης» Εφ. ΤΟ ΒΗΜΑ (22/11/2010)
- [6] <https://www.ancientgrecereloaded.com>
- [7] https://el.wikipedia.org/wiki/Ερατοσθένης_ο_Κυρηναίος
- [8] https://el.wikipedia.org/wiki/Κλεομήδης_ο_Κοσμογράφος